

Università degli Studi di Roma
“La Sapienza”



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea Specialistica in Fisica

Studio fenomenologico della risonanza $Y(2175)$ e possibile interpretazione come stato a quattro quark

Relatori:

Dott. Riccardo Faccini

Dott. Antonio Davide Polosa

Laureanda:

Nadejda Vassileva Drenska

Anno Accademico 2007-2008

Indice

Introduzione	1
1 La fisica dei mesoni leggeri	7
1.1 Introduzione storica al modello a quark	7
1.1.1 Risonanze barioniche	9
1.1.2 Mesoni	9
1.2 Il modello di Gell-Mann	10
1.2.1 Adroni in termini di quark	12
1.2.2 Il gruppo di simmetria $SU(2)$	13
1.2.3 Il gruppo di simmetria $SU(3)$	14
1.3 I mesoni scalari leggeri	18
1.4 La risonanza $Y(2175)$	20
2 Stati a quattro quark	23
2.1 La neutralizzazione della carica di colore	23
2.1.1 Un nuovo numero quantico: il colore	23
2.1.2 La carica di colore nei mesoni	24
2.2 Espansione $1/N$	25
2.2.1 Le interazioni in QCD	26
2.2.2 Le interazioni nel limite di grande N	27

2.2.3	Stati a quattro quark: diagrammi dominanti	32
2.3	Stati scalari come tetraquark	33
3	Caratteristiche di un diquark	37
3.1	Numeri quantici del diquark	37
3.1.1	La carica di colore	38
3.1.2	La composizione del sapore	44
3.1.3	Composizione di spin	44
3.1.4	Antisimmetrizzazione	45
3.2	Diquark 'bad' e 'good'	46
3.2.1	Barioni in termini di diquark	50
3.2.2	Le masse dei diquark	52
4	L'Hamiltoniana degli stati tetraquark 1^{--}	57
4.1	L'Hamiltoniana efficace	58
4.1.1	I termini di interazione	58
4.1.2	Le costanti di accoppiamento	60
4.1.3	La base	63
4.2	Diagonalizzazione	66
4.2.1	Azione degli operatori sugli stati	66
4.2.2	Risultati numerici	70
5	L'ISR e il rivelatore <i>BaBar</i>	73
5.1	La radiazione di stato iniziale	74
5.2	PEP-II	76
5.3	Il sistema di tracciamento	76
5.3.1	Il rivelatore di vertice	77

5.3.2	La camera a deriva	78
5.4	Il rivelatore Cerenkov a riflessione interna	79
5.5	Il calorimetro elettromagnetico	80
5.6	Il magnete	81
5.7	L'IFR	82
5.8	L'identificazione sperimentale di eventi <i>ISR</i>	82
6	Strategia di analisi	85
6.1	Possibili modi di decadimento della $Y(2175)$	85
6.1.1	Produzione di coppia $q\bar{q}$	86
6.1.2	Scambio $q\bar{q}$	88
6.1.3	Vertice istantone	89
6.2	Dati sperimentali relativi ai possibili decadimenti della $Y(2175)$	91
6.2.1	Canale di scoperta $e^+e^- \rightarrow \phi f_0 \gamma_{ISR}$: tetraquark nello stato finale . .	92
6.2.2	Canale barionico: $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda} \gamma_{ISR}$	94
6.2.3	Canale mesonico: $e^+e^- \rightarrow \phi \eta \gamma_{ISR}$	94
6.3	La sezione d'urto	95
7	Rianalisi dei dati sperimentali	101
7.1	Procedura generale di fit	101
7.1.1	Il fit simultaneo a più canali	103
7.2	Il canale di scoperta: $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)f_0(980)$	104
7.3	Rianalisi del decadimento barionico $\Lambda \bar{\Lambda}$	106
7.4	Rianalisi del canale mesonico $\phi \eta$	108
	Conclusioni	112
	Bibliografia	115

Introduzione

Nella CromoDinamica Quantistica, la teoria delle interazioni forti, gli adroni sono descritti come stati legati di quark. In particolare i mesoni si riescono a spiegare come stati quark-antiquark, mentre i barioni sono costituiti da tre quark di valenza. Gli adroni che necessitano di una differente composizione in termini di quark vengono classificati come stati esotici.

Fin dalla prima formulazione del concetto di quark, Gell-Mann menziona la possibilità di strutture mesoniche costituite da quattro quark [1], ossia del tipo $(qq\bar{q}\bar{q})$. Il primo lavoro sistematico sull'esistenza di queste strutture è dovuto a Jaffe che, nel 1976, discute l'interpretazione di mesoni scalari leggeri, con masse al di sotto della scala del GeV, in termini di stati a quattro quark [2]. L'interazione tra i quark favorisce la formazione del tetraquark $[qq][\bar{q}\bar{q}]$, ossia la configurazione che vede i due quark legati a formare un diquark $[qq]$ e i due antiquark legati nell'antidiquark $[\bar{q}\bar{q}]$. Lo stato $[q\bar{q}][q\bar{q}]$, corrispondente alla configurazione molecolare, non è stabile nella teoria interagente.

La ricerca di stati esotici contenente quark charm c si rivela di particolare interesse in quanto lo spettro del charmonio si può riprodurre con accuratezza. Alcune strutture osservate sperimentalmente, quali la risonanza $X(3872)$ e la $X(3876)$, sono di difficile interpretazione nello schema $(q\bar{q})$ e ne viene fornita una descrizione in termini di stati tetraquark [3]. Si tratta di due stati osservati in due distinti canali di decadimento, $J/\psi\pi^+\pi^-$ e $D^0\bar{D}^0\pi^0$, con differenze di massa dell'ordine della differenza di massa tra i quark u e d . Essendo stati neutri la composizione in quark può essere scritta come

$X(3872) = [cd][\bar{c}\bar{d}]$ e $X(3876) = [cu][\bar{c}\bar{u}]$. Nell'ipotesi di stati a quattro quark è ammessa l'esistenza di stati carichi e la scoperta della risonanza $Z(4433)$ [4] lascia ampio spazio all'interpretazione in termini di stato $[cu][\bar{c}\bar{d}]$, ossia come primo stato carico di una nuova spettroscopia [5]. Con un anno di distanza, nell'Agosto del 2008, la collaborazione di Belle comunica la scoperta di altre due risonanze mesoniche con carica totale unitaria, osservate nei prodotti di decadimento del mesone B e identificati come $Z1$ alla massa 4051 GeV e $Z2$ alla massa 4248 GeV. Negli ultimi anni il campo della spettroscopia esotica è di forte interesse in virtù delle nuove osservazioni sperimentali non ancora pienamente inquadrare in uno schema unico.

Il lavoro di tesi svolto si inserisce in questo quadro generale e si prefigge l'obiettivo di interpretare la risonanza mesonica $Y(2175)$ come possibile candidato a stato di tetraquark. La $Y(2175)$ viene scoperta in un processo di radiazione di stato iniziale (ISR) presso il collisore e^+e^- dei laboratori $SLAC$. Il canale di scoperta presenta uno stato tetraquark tra i prodotti di decadimento e i numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$ lasciano supporre che si tratta di un possibile stato eccitato rispetto al multipletto dei mesoni scalari leggeri interpretati come stati tetraquark. Per motivare lo studio della risonanza mesonica, nel primo capitolo del lavoro svolto viene delineato un quadro generale del modello di Gell-Mann che, inquadrando in uno schema consistente lo spettro degli adroni, descrive i mesoni ordinari come stati $(q\bar{q})$. Da questa descrizione risulta una dipendenza tra la massa delle particelle e il contenuto di quark dotati di stranezza, dipendenza che non viene rispettata dal multipletto di mesoni scalari leggeri. Questa peculiarità e le evidenze sperimentali sono ben spiegate assumendo la struttura a quattro quark.

Nel secondo capitolo viene discusso come scrivere la funzione d'onda di uno stato a quattro quark, introducendo e facendo uso del limite di 't Hooft. Si mostra come, nell'ipotesi di quattro quark interagenti, l'attrazione tra due quark sia favorita rispetto alla configurazione quark-antiquark. Questo giustifica perchè la formazione del tetraquark sia dominante

rispetto allo stato legato molecolare.

In seguito, nel terzo capitolo, si formalizza il concetto di diquark, stato legato di due quark, che assieme all'antidiquark costituisce un tetraquark. Se ne descrivono le simmetrie di spin, sapore e colore.

Nel capitolo quarto si procede con il calcolo teorico dello spettro degli stati caratterizzati dai numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$. Il metodo sviluppato è basato sul modello a quark costituenti e le interazioni considerate sono di tipo cromo-magnetico e di eccitazione angolare tra i diquark. La stima delle masse nelle diverse ipotesi di quark costituenti per lo stato $Y(2175)$ mostra come sia la struttura $[qs][\bar{q}\bar{s}]$ che $[ss][\bar{s}\bar{s}]$ possa spiegare la risonanza osservata.

La discriminazione tra le due possibili configurazioni è basata sulla rianalisi di dati sperimentali pubblicati dalla collaborazione *BaBar*. Nel capitolo quinto viene descritto l'apparato sperimentale con particolare attenzione alla selezione degli eventi da radiazione iniziale.

La discussione di quali siano i possibili canali di decadimento della risonanza $Y(2175)$ secondo entrambe le ipotesi sul contenuto in quark suggerite dall'analisi teorica è condotta nel capitolo sesto. Si mostra la strategia di analisi e come effettuare lo studio della sezione d'urto dei tre diversi canali di decadimento individuati.

Infine nel capitolo settimo si mostrano i risultati ottenuti e viene constatato come, sia dall'analisi teorica del capitolo quarto, sia dalla rianalisi dei dati sperimentali effettuata in questo capitolo conclusivo, sia possibile dare un'interpretazione della risonanza $Y(2175)$ come stato di tetraquark e motivarne il contenuto in termini di quark.

Capitolo 1

La fisica dei mesoni leggeri

Il modello a quark è alla base della comprensione della fisica adronica. Per decenni tutte le particelle sono state spiegate in termini di stati legati quark-antiquark oppure tre quark. Recenti osservazioni sembrano poter allargare questo schema, evidenziando la possibilità di stati a quattro quark.

Il questo capitolo si introduce il modello a quark di Gell-Mann: dalle motivazioni storiche che ne hanno determinato lo sviluppo alla capacità di spiegare la struttura dei multipletti adronici. Viene poi analizzato il formalismo matematico alla base del modello stesso. Si discutono le proprietà di alcuni mesoni leggeri interpretabili come stati a quattro quark. In conclusione del capitolo si introduce una nuova risonanza mesonica recentemente osservata, la $Y(2175)$. L'argomento centrale del lavoro di tesi svolto è l'interpretazione della risonanza $Y(2175)$ come stato a quattro quark.

1.1 Introduzione storica al modello a quark

Fino ai primi anni '50 le tecniche sperimentali a disposizione permettono di identificare le particelle osservando le tracce rilasciate in camere a bolle o in emulsioni nucleari. Le particelle studiate in questo periodo sono quelle soggette a decadimenti deboli, con vite medie dell'ordine di 10^{-10} s. I decadimenti per interazione forte avvengono su una

scala temporale molto più breve e la loro osservazione inizia con le macchine acceleratrici degli anni '50. La proliferazione delle risonanze adroniche prodotte pone il problema di individuare un adeguato schema di classificazione.

La prima organizzazione schematica delle particelle in multipletti risale agli anni '30, quando Heisenberg [6] introduce il concetto di isospin. Il protone e il neutrone sono due particelle distinte dalla carica, ma le loro masse, rispettivamente 938.3 MeV e 939.6 MeV, differiscono di pochi MeV. Le sezioni d'urto pp e pn mostrano un comportamento molto simile, a parte effetti elettromagnetici. Inoltre c'è una sorprendente similitudine tra i livelli nucleari dei nuclei speculari, nei quali il numero dei protoni e dei neutroni è scambiato. Per via di queste proprietà si introduce l'isospin come grado di libertà interno di un'unica entità, il nucleone, con due possibili stati, protone e neutrone. In analogia con lo spin $S = 1/2$ che può assumere due proiezioni $S_3 = \pm 1/2$, al nucleone si attribuisce $I = 1/2$, con $I_3 = +1/2$ per il protone e $I_3 = -1/2$ per il neutrone. Dato l'isospin I si hanno $2I + 1$ valori di I_3 che permettono di distinguere i multipletti in singoletti ($I = 0$), doppietti ($I = 1/2$) e tripletti di isospin ($I = 1$).

Esiste una relazione che lega la componente I_3 alla carica Q e al numero barionico B di un dato stato. Per un nucleo costituito da Z protoni e N neutroni valgono le seguenti uguaglianze:

$$Q = Z; \quad B = Z + N; \quad I_3 = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}N. \quad (1.1)$$

La terza relazione è vera in quanto la terza componente dell'isospin è un numero quantico additivo, quindi si devono sommare i contributi di protoni e di neutroni. La relazione che ne deriva è

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B. \quad (1.2)$$

La stranezza è un altro numero quantico additivo, conservato nelle interazioni forti. Le particelle strane vengono prodotte nelle interazioni forti e hanno una vita media dell'ordine di 10^{-8} s, ovvero decadono per interazione debole che non conserva la stranezza. Le

particelle strane più leggere sono i mesoni K: si attribuisce stranezza positiva alla particella dotata di carica elettrica positiva.

1.1.1 Risonanze barioniche

La prima risonanza barionica viene osservata nel 1952 [7], in un processo di formazione nel canale $p\pi^+$. La componente I_3 della risonanza è data dalla somma delle componenti del p e del π^+ e risulta $+3/2$. Con $I = 3/2$, si possono trovare quattro particelle differenti per carica in base alla relazione (1.2). La risonanza scoperta prende il nome di Δ e i quattro stati carichi osservati sono: $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$. Tra gli anni '50 e '60 vengono scoperti nuovi multipletti di isospin: il tripletto della Σ e della Σ^* , il doppietto della Ξ e della Ξ^* .

La relazione (1.2) non riproduce correttamente le cariche delle particelle strane. Ad esempio, per la Σ^+ si trova $Q = 1 + \frac{1}{2}$. La giusta carica si ottiene generalizzando la (1.2) in

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}, \quad (1.3)$$

dove Y prende il nome di ipercarica. Nel caso in esame si ha una particella a stranezza $S = -1$ e la carica risulta essere correttamente $Q = 1 + \frac{1-1}{2}$. L'eq.(1.3) viene indicata col nome di relazione di Gell-Mann - Nishijima [8] [9].

1.1.2 Mesoni

I primi mesoni osservati sono il pione π ed il kaone K. Il π ha tre stati diversi in carica, π^+, π^0, π^- e, secondo la relazione (1.3), appartiene ad un tripletto di isospin, con $I = 1$ e $I_3 = +1, 0, -1$. Gli stati del K formano i doppietti: (K^+, K^0) a stranezza $S = +1$ e il coniugato di carica $(K^-, \bar{K}^0)$ a stranezza $S = -1$. Nel '61 viene osservata la prima risonanza mesonica, chiamata K^* . Analogamente al K, il K^* compare in due doppietti di isospin diversi per il contenuto in stranezza. La formula (1.3) riproduce correttamente

Particella	B	Isospin	Stranezza	Massa(MeV)	Spin	Parità
p	+1	1/2	0	938	1/2	+
n	+1	1/2	0	940	1/2	+
Λ	+1	0	-1	1116	1/2	+
Σ	+1	1	-1	1193	1/2	+
Ξ	+1	1/2	-2	1315	1/2	+
Δ	+1	3/2	0	1232	3/2	+
Σ^*	+1	1	-1	1385	3/2	+
Ξ^*	+1	1/2	-2	1530	3/2	+
π	0	1	0	135	0	-
$K^0 K^+$	0	1/2	+1	495	0	-
$K^- K^0$	0	1/2	-1	495	0	-
ρ	0	1	0	770	1	-
$K^{*0} K^{*+}$	0	1/2	+1	890	1	-
$K^{*-} \bar{K}^{*0}$	0	1/2	-1	890	1	-

Tabella 1.1: Tabella dei barioni e mesoni noti prima dell'introduzione del modello di Gell-Mann.

la carica dei quattro stati. Nello stesso anno vengono osservate la risonanza della ρ , che compare in tre stati di carica come il π ma ha spin $S = 1$, e la risonanza neutra dell' ω , a spin $S = 1$, priva di partner carichi.

1.2 Il modello di Gell-Mann

In tab.(1.1) sono riassunte le principali caratteristiche dei mesoni e dei barioni osservati prima dell'introduzione del modello di Gell-Mann, noto come 'The Eightfold Way' [1]. Il modello ricostruisce in ottetti, o strutture che si ottengono combinando due ottetti, lo spettro delle risonanze osservate. 'The Eightfold Way' postula che tutte le risonanze possono essere organizzate in multipletti di queste dimensionalità. Esaminando i barioni si trova un ottetto di particelle a spin $S = 1/2$ costituito da un doppietto di isospin (p, n), un tripletto di isospin ($\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$), il singoletto della Λ , e un ulteriore doppietto formato dagli stati (Ξ^-, Ξ^0). Una struttura molto simile si trova per i mesoni ($\pi, K^0, K^+, K^-, \bar{K}^0$).

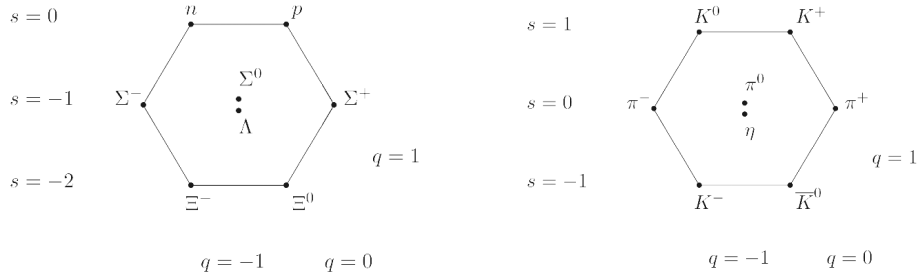


Figura 1.1: Gli ottetti dei barioni e dei mesoni.

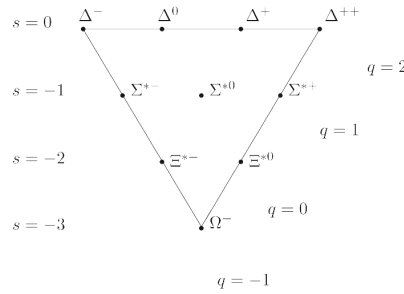


Figura 1.2: Il decupletto dei barioni.

Lo schema prevede una particella, l' η , che al tempo in cui viene sviluppato il modello non è stata ancora osservata. Gli ottetti descritti possono essere rappresentati in un unico schema utilizzando due coordinate, I_3 e Y , come mostrano le fig.(1.1) e (1.2). Il multipletto dei mesoni ($\rho, K^{*0}, K^{*+}, K^{*-}, \bar{K}^{*0}$) è costituito da otto particelle a spin totale $S = 1$ e nel piano (I_3, Y) segue la stessa disposizione dei mesoni a spin totale $S = 0$. Le risonanze barioniche a spin ($S = 3/2$) vengono organizzate in una struttura differente, il decupletto, come si mostra in fig.(1.2). Per completare un decupletto si richiede l'esistenza di un particella, chiamata Ω^- , a carica negativa, singoletto di isospin e con contenuto in stranezza $S = -3$. Questa è la seconda particella predetta nello schema di Gell-Mann. Le risonanze η e Ω^- sono state osservate sperimentalmente due anni dopo la loro predizione. Per dare una corretta spiegazione della sorprendente regolarità Gell-Mann introduce

Numeri quantici	u	d	s
Q - Carica elettrica	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
I - Isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
I_3	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
S - Stranezza	0	0	-1

Tabella 1.2: Numeri quantici dei quark proposti da Gell-Mann.

nel suo modello il concetto di 'quark'.

1.2.1 Adroni in termini di quark

Nel modello di Gell-Mann la regolarità delle risonanze viene spiegata ipotizzando che le risonanze osservate non sono entità elementari ma particelle con una sottostruttura dovuta a dei nuovi costituenti, nominati 'quark'. Si ipotizza l'esistenza di tre fermioni a spin $\frac{1}{2}$, numero barionico $\frac{1}{3}$ e parità positiva: u, d, s con i numeri quantici sintetizzati in tab.(1.2). Viene postulata anche l'esistenza delle relative antiparticelle con numeri quantici additivi Q, I_3, S e parità P opposti. I mesoni vengono spiegati in termini di stati quark-antiquark, $q\bar{q}'$, con totale numero barionico nullo. Essendo la parità dell'antiquark opposta a quella del quark, la parità del mesone è data dalla relazione $P = (-1)^{L+1}$, dove L è l'eccitazione angolare orbitale del quark rispetto all'antiquark. Per stati $q\bar{q}$ (quark-antiquark) si definisce l'autovalore della coniugazione di carica attraverso la relazione $C = (-1)^{L+S}$, dove S è lo spin del mesone.

Ai barioni è attribuita una composizione in termini di tre quark, stati qqq con numero barionico totale +1.

La questione sull'effettiva esistenza dei quark come costituenti elementari rimane aperta fino agli anni '60. Esperimenti di diffusione di elettrone-nucleone a SLAC [10] mostrano che i nucleoni hanno una struttura interna fatta di costituenti puntiformi, detti partoni. Lo studio delle funzioni di struttura permette di identificare i partoni con quark e gluoni,

dando la definitiva conferma sperimentale del modello a quark.

L'idea fondamentale di Gell-Mann è stata quella di introdurre i costituenti fondamentali degli adroni: assumendo l'esistenza di tali entità Gell-Mann ha scoperto la struttura fondamentale nascosta negli adroni.

1.2.2 Il gruppo di simmetria $SU(2)$

Per capire le basi matematiche del modello a quark si deve introdurre qualche nozione riguardante i gruppi di simmetria. In particolare in questo paragrafo si forniscono gli elementi base del gruppo $SU(2)$ che spiega le simmetrie di spin ed isospin.

I generatori della rappresentazione fondamentale del gruppo, quella con la dimensionalità più bassa, sono le tre matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e l'algebra del gruppo è definita dalle relazioni di commutazione e anticommutazione

$$\begin{aligned} [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i\epsilon^{ijk}\sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij} \quad i, j, k = 1, \dots, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Gli operatori di spin $\vec{S}$ sono proporzionali alle matrici di Pauli e sono dati da

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad (1.5)$$

Lo spazio vettoriale sul quale agiscono tali operatori è generato dai due vettori di base $|S, S_3\rangle = |\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$. Per costruire rappresentazioni con dimensionalità più alta rispetto la fondamentale si utilizza il prodotto diretto. Combinando due rappresentazioni fondamentali $\mathbf{2}$ si ha $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2}$. Lo spazio vettoriale che si genera è dato dal prodotto diretto degli spazi vettoriali corrispondenti alla prima e alla seconda rappresentazione, ovvero lo spazio ottenuto dal prodotto diretto dei vettori di base

$$\left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \right\rangle_2 \quad (1.6)$$

Si ottengono le quattro componenti di un tensore a due indici ψ^{ij}

$$\begin{aligned}
 \psi^{11} &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_2 \\
 \psi^{12} &= \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 \\
 \psi^{21} &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_2 \\
 \psi^{22} &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \otimes \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

che per essere espresse come vettori $|S, S_3\rangle$ devono essere simmetrizzate e antisimmetrizzate rispetto allo scambio degli indici 1,2. Le componenti ψ^{12} e ψ^{21} non hanno spin totale definito, mentre la prima e l'ultima componente sono simmetriche a spin unitario. Se si considerano le combinazioni lineari $\psi^{12} \pm \psi^{21}$, per il tensore ψ^{ij} si ottengono tre componenti simmetriche e una antisimmetrica. Questo è espresso dall'uguaglianza

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \tag{1.8}$$

Dalla composizione di due spin $\frac{1}{2}$ nella rappresentazione fondamentale $\mathbf{2}$ si ottengono tre stati a spin totale 1 distinti dalla componente S_3 che costituiscono la rappresentazione $\mathbf{3}$ e uno stato a spin totale nullo nella rappresentazione di singoletto $\mathbf{1}$.

1.2.3 Il gruppo di simmetria $SU(3)$

La spiegazione del modello a quark dal punto di vista matematico si basa sulle proprietà del gruppo di simmetria $SU(3)$. Questo è il gruppo delle matrici 3×3 a determinante unitario. I generatori del gruppo sono otto matrici hermitiane, a traccia nulla. Il numero di generatori commutanti, la sottoalgebra di Cartan, stabilisce il rango del gruppo. $SU(3)$ è un gruppo di rango due. I generatori diagonali sono:

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La normalizzazione è scelta in modo da avere

$$\text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 8. \quad (1.9)$$

Le quantità osservabili associate ai generatori diagonali sono la terza componente dell'isospin I_3 e l'ipercarica Y dei quark di sapore u, d, s :

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3 \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad (1.10)$$

Gli autovettori simultanei delle matrici diagonali definite in eq.(1.10) possono essere scritti come

$$q^1 = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q^2 = d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q^3 = s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovvero come le componenti del multipletto q^i con rispettivamente $i = 1, 2, 3$ per u, d, s . La rappresentazione fondamentale di $SU(3)$ è un tripletto $\mathbf{3}$. A partire da questo multipletto fondamentale possono essere generati tutti gli altri multipletti. La rappresentazione coniugata alla $\mathbf{3}$ è la $\bar{\mathbf{3}}$ e il multipletto si indica con gli indici bassi q_i , $i = 1, 2, 3$.

Come per la composizione degli spin, la composizione di due rappresentazioni di $SU(3)$ è basata sulla scomposizione in parte simmetrica e antisimmetrica del tensore risultante dal prodotto diretto di due rappresentazioni. Dal prodotto di due rappresentazioni fondamentali $\mathbf{3}$ si ha:

$$\begin{aligned} q^i v^i &= \frac{1}{2}(q^i v^j + q^j v^i) + \frac{1}{2}(q^i v^j - q^j v^i) \\ &= \frac{1}{2}S^{ij} + \frac{1}{2}A^{ij} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Le componenti della parte antisimmetrica A^{ij} sono tre e si possono scrivere come

$$\begin{aligned} A^{12} &= q^1 v^2 - q^2 v^1 \\ A^{23} &= q^2 v^3 - q^3 v^2 \\ A^{31} &= q^3 v^1 - q^1 v^3 \end{aligned} \quad (1.12)$$

La parte simmetrica ha sei componenti in quanto oltre a questa combinazione degli indici si hanno anche le componenti con $i = j$. La legge di composizione che ne risulta è

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}} \quad (1.13)$$

In modo del tutto analogo si possono provare le leggi di composizione dei multipletti

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} &= \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} &= \mathbf{3} \otimes (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Lo schema degli autovalori simultanei di I_3 e Y prende il nome di diagramma dei pesi ed è mostrato in fig.(1.3). Si osserva che in virtù della piccola differenza di massa tra i quark u, d essi sono organizzati in un doppietto di isospin, mentre il quark s è un singoletto di isospin. Questo si riscontra negli autovalori della matrice λ_3 proporzionale alla matrice I_3 come mostrato in eq.(1.10). Per ottenere il diagramma dei pesi della rappresentazione $\bar{\mathbf{3}}$,

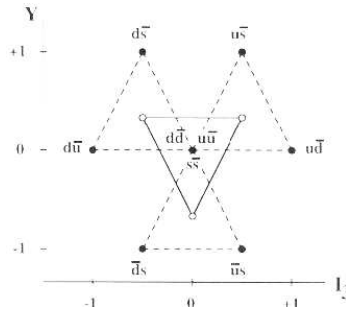


Figura 1.3: Diagramma dei pesi per le rappresentazioni $\mathbf{3}$ e $\bar{\mathbf{3}}$.

alla quale appartengono gli antiquark $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$, è necessario invertire il segno dei due numeri quantici additivi I_3 e Y .

La combinazione delle rappresentazioni fondamentale $\mathbf{3}$ e antifondamentale $\bar{\mathbf{3}}$ spiega la corretta composizione in termini di quark dei mesoni $q\bar{q}'$. Le nove possibili combinazioni $q\bar{q}'$ che si ottengono a partire dai quark leggeri $q = u, d, s$ sono raggruppate in un ottetto

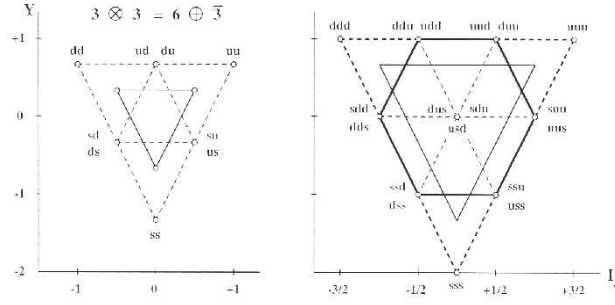


Figura 1.4: Composizione in quark dei barioni qqq .

e un singoletto, esattamente secondo la prima relazione di eq.(1.14). Nel caso dei mesoni ($\pi, K^0, K^+, K^-, \bar{K}^0, \eta$) riportato in fig.(1.1), il singoletto è dato dall'isoscalare η' , privo di carica elettrica e neutro in sapore.

La composizione in termini di quark dei multipletti barionici è illustrata in fig.(1.4). Con il prodotto di tre rappresentazioni fondamentali si ritrova l'ottetto in fig.(1.1) e il decupletto in fig.(1.2), con il corretto contenuto in quark.

Focalizzando ora l'attenzione al caso dei mesoni, si può analizzare la regolarità del modello $q\bar{q}'$ da un altro punto di vista. La comprensione in termini di quark che costituiscono lo stato permette di tradurre l'organizzazione in multipletti in una dipendenza di massa. La massa dei componenti dei multipletti di isospin cresce con l'aumentare del numero di quark s necessari per descrivere i numeri quantici dello stato e dunque cresce al descredere dell'isospin dei mesoni stessi. Nello schema $q\bar{q}'$, il doppietto di isospin ha massa superiore rispetto al tripletto costituito da soli quark u e d in quanto contiene un quark s . In fig.(1.5) viene mostrato questo andamento sia per i mesoni pseudoscalari a spin totale 0, sia per gli stati vettoriali a spin totale 1. La struttura generale nel modello $q\bar{q}'$ è quella di un tripletto di isospin costituito da quark u, d , seguito da un doppietto a massa superiore. Tale regolarità si ritrova in tutti i multipletti dei mesoni descritti in termini di due quark legati.

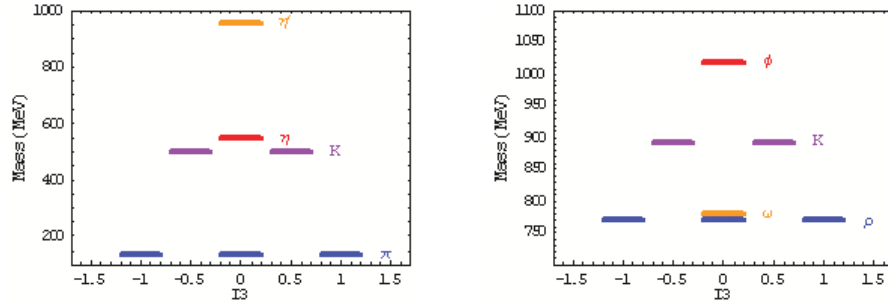


Figura 1.5: Massa dei mesoni pseudoscalari e vettoriali in funzione dell'isospin.

1.3 I mesoni scalari leggeri

I mesoni esaminati fino ad ora vengono compresi in termini di stati legati a due quark. Il modello a quark non pone vincoli su possibili stati a più quark. Negli ultimi anni si è rivolta particolare attenzione a stati legati di quattro quark, in quanto strutture di questo tipo riescono a spiegare risonanze scalari osservate al di sotto della scala del GeV, di difficile interpretazione in termini di mesoni $q\bar{q}'$.

Il mesone $a_0(980)$ figura nel Particle Data Group (PDG) come un isovettore di massa 984 MeV e larghezza incerta tra 50 e 100 MeV. Il decadimento dominante è nel canale $\eta\pi$, con frazione significativa di decadimento anche nel canale $K\bar{K}$ [11]. Uno stato molto vicino in massa e con stessa incertezza sulla larghezza è classificato come $f_0(980)$. Un canale di decadimento osservato è $K\bar{K}$, mentre il decadimento dominante è nel canale $\pi\pi$. La soglia di produzione di due mesoni K è superiore rispetto al valore centrale della distribuzione in massa degli scalari in esame. Solo la coda ad alte energie ha accesso allo stato finale $K\bar{K}$. Per questa soppressione dello spazio delle fasi, i due mesoni sono osservati prevalentemente come risonanze strette nei canali $\eta\pi$ e $\pi\pi$. L'interpretazione in termini di mesoni $q\bar{q}'$ attribuirebbe la composizione in quark leggeri u, d senza spiegare l'affinità per lo stato finale $K\bar{K}$. Questa forte affinità può essere spiegata ipotizzando una struttura a quattro quark, con una esplicita componente $s\bar{s}$ oltre alla componente di

quark leggeri. Il mesone $f_0(980)$ viene abbondantemente prodotto nel decadimento del D_s^+ [12]. La componente $s\bar{s}$ segue dal canale di decadimento Cabibbo favorito $c \rightarrow s$. Le risonanze descritte sono interpretate come costituenti di un multipletto di mesoni scalari leggeri con numeri quantici $J^{PC} = 0^{++}$ ed evidente struttura a quattro quark.

Esistono diverse evidenze sperimentali per uno stato molto largo, chiamato $f_0(600)$ o σ , con massa attorno ai 470 MeV [13],[14]. Dal decadimento dominante in due pioni si evince che la composizione in termini di quark è data da soli quark leggeri u, d . Questo stato ha gli stessi numeri quantici del multipletto dei mesoni scalari leggeri. La diversa larghezza trova spiegazione nel fatto che il decadimento favorito è in due pioni e non esiste la soppressione di soglia presente nei decadimenti di $a_0(980)$ e $f_0(980)$ in $K\bar{K}$ (decadimenti favoriti ma soppressi dallo spazio fasi).

L'esistenza di una possibile risonanza mesonica attorno alla massa di 800 MeV, $\kappa(800)$, necessita ancora una decisiva conferma, sebbene vi siano diverse evidenze sperimentale come ad esempio in [16], [15]. Dallo studio del canale $\kappa(800) \rightarrow K\pi$ segue che, come per la $\sigma \rightarrow \pi\pi$, la larghezza non è stretta per via del sufficiente spazio delle fase disponibile. Il valore di massa simile e gli stessi numeri quantici permettono l'inserimento di questo mesone in un multipletto di mesoni scalari leggeri con $J^{PC} = 0^{++}$.

Si può pertanto parlare di un nuovo nonetto a bassa energia, descritto interamente in termini di stati a quattro quark $(a_0, f_0, \kappa, \sigma)$.

La difficoltà nello spiegare questo multipletto in termini di stati $q\bar{q}'$ segue anche dalla invertita disposizione delle masse rispetto alla degenerazione in isospin. Per i multipletti dei mesoni $q\bar{q}'$ mostrati in fig.(1.5) si trova che gli stati con più alto contenuto in quark s hanno massa superiore, ossia i doppietti di isospin hanno massa superiore agli isovettori. Il caso dei mesoni scalari leggeri in esame è mostrato in fig.(1.7), dove gli stati $\kappa(800)$ e $a_0(980)$ sono scambiati rispetto allo schema $q\bar{q}'$. Il numero di stati che costituiscono il multipletto rafforza l'ipotesi di stati 'esotici', ovvero oltre il modello $q\bar{q}'$. Come viene

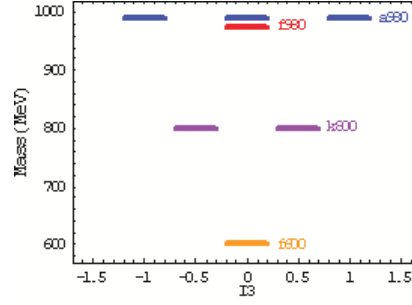


Figura 1.6: Il nonetto dei mesoni scalari leggeri 0^{++} , con massa inferiore al GeV.

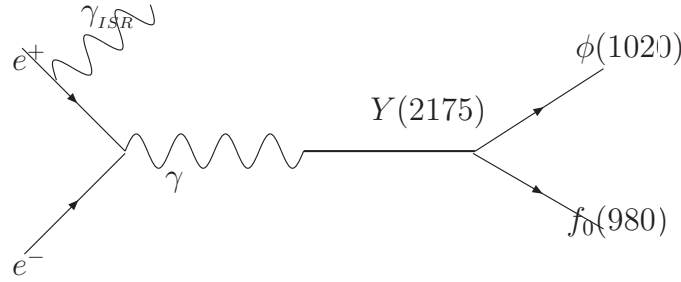


Figura 1.7: Canale di scoperta della risonanza $Y(2175)$ in ISR .

discusso nel cap.(3), la dimensionalità del multipletto si può facilmente spiegare, a partire da leggi di composizione di multipletti fondamentali, come visto nel caso dei mesoni $q\bar{q}$.

1.4 La risonanza $Y(2175)$

In questo paragrafo si introduce una nuova risonanza mesonica recentemente osservata dall'esperimento *BaBar* [33]. La macchina acceleratrice e il rivelatore di particelle vengono descritti nel cap.(5). Di seguito viene discussa l'evidenza sperimentale della risonanza. Il canale di scoperta è dato dal processo $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)f_0(980)\gamma_{ISR}$, con radiazione di un fotone dallo stato iniziale, Initial State Radiation (*ISR*). I numeri quantici del mesone $Y(2175)$ sono fissati $J^{PC} = 1^{--}$ per via del fotone virtuale che si crea nel vertice elettrone-positrone e al quale la Y si accoppia. La massa è stimata al valore $2175 \pm 10 \pm 15$ MeV,

con larghezza di $58 \pm 16 \pm 20$ MeV, con primo errore statistico e secondo sistematico. Lo stato finale è costituito dal mesone $\phi(1020)$, riconosciuto come stato quark-antiquark con componente dominante del quark s ($s\bar{s}$), e dal mesone $f_0(980)$ possibilmente interpretato come stato a quattro quark con contenuto di quark leggeri e quark strani: $s\bar{s}q\bar{q}$. Il decadimento con produzione di stato finale contenente un mesone a quattro quark suggerisce che la $Y(2175)$ stessa possa essere un mesone a quattro quark. Il valore della massa, superiore a 2 GeV, e la struttura di sapore della Y , ricostruibile sulla base dei prodotti di decadimento, fanno pensare che questa risonanza sia una eccitazione orbitale di un mesone a 4 quark leggeri.

Capitolo 2

Stati a quattro quark

Gli adroni sono descritti in termini di aggregati di quark che neutralizzano la carica detta di 'colore'. Neutralizzare la carica di colore nell'ipotesi di stato a quattro quark porta a due configurazioni differenti: lo stato molecolare e lo stato tetraquark. In questo capitolo, dopo una breve introduzione della carica di colore, si studia quale tra le due configurazioni sia favorita. Attraverso l'analisi dei diagrammi di Feynman nel limite di simmetria ampliata $SU(N)$, si mostra come l'interazione tra i quark favorisca l'ipotesi di tetraquark. Viene poi presentata la corretta composizione in termini di quark del nonetto dei mesoni scalari leggeri (a_0, f_0, κ, σ), mesoni interpretati come tetraquark. Infine si mostra lo spettro di massa degli stati scalari leggeri e si discute come l'ipotesi di stati a quattro quark ne spieghi la peculiarità.

2.1 La neutralizzazione della carica di colore

2.1.1 Un nuovo numero quantico: il colore

I numeri quantici di spin e sapore introdotti nel cap. 1 non sono sufficienti a spiegare le proprietà della risonanza Δ^{++} . Questo è uno stato barionico costituito da tre quark leggeri, con spin totale $3/2$ e parità positiva. Essendo la Δ^{++} il barione più leggero con spin $3/2$ si può assumere nullo il momento angolare orbitale, $L = 0$, che corrisponde ad

una funzione d'onda spaziale simmetrica. Per avere $J = 3/2$ i tre spin dei tre quark devono essere paralleli, ad esempio:

$$|\Delta^{++}\rangle = |u^\uparrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle \quad (2.1)$$

Ne segue che anche la funzione d'onda di spin è simmetrica, come lo è quella di sapore. La funzione d'onda totale della Δ^{++}

$$\psi_{tot} = \psi_{spaziale}\psi_{sapore}\psi_{spin} \quad (2.2)$$

risulta essere totalmente simmetrica sotto lo scambio di una qualsiasi coppia dei tre quark, in contraddizione con il principio di esclusione di Pauli. La soluzione proposta nel 1964 da Greenberg assegna un nuovo numero quantico ai quark: la carica di colore [17]. La corretta funzione d'onda si scrive quindi come

$$\psi_{tot} = \psi_{spaziale}\psi_{sapore}\psi_{spin}\psi_{colore} \quad (2.3)$$

con la componente di colore antisimmetrica, in modo da antisimmetrizzare la funzione d'onda totale.

Si postula che i quark esistono in tre colori e gli antiquark sono dotati di anti-colore. Negli stati fisici osservabili la carica di colore è neutralizzata. Il gruppo di simmetria del colore è $SU(3)$, le cui proprietà fondamentali sono discusse nel par.(1.2.3). Come la carica elettrica è alla base della teoria ElettroDinamica Quantistica (QED), così la carica di colore genera la CromoDinamica Quantistica (QCD).

2.1.2 La carica di colore nei mesoni

I mesoni pseudoscalari ($\pi, K^0, K^+, K^-, \bar{K}^0$) mostrati il fig.(1.1) sono ben descritti dal modello $q\bar{q}'$. La neutralizzazione dell'indice di colore, indicato con le lettere greche, è univocamente determinata da

$$q^\alpha \bar{q}'^\beta \delta_{\alpha\beta} = q^\alpha \bar{q}'_\alpha \quad (2.4)$$

dove è intesa la somma sugli indici ripetuti. Per stati a quattro quark la neutralizzazione dell'indice di colore può avvenire in modi differenti

- ogni quark neutralizza la carica di colore di un singolo antiquark, ovvero si ha la situazione $[q^\alpha \bar{q}'_\alpha] [q''^\beta \bar{q}'''_\beta]$
- tra la coppia di quark legati nella configurazione di diquark e la coppia di antiquark legati a formare l'antidiquark, ovvero $[qq']_\alpha [\bar{q}'' \bar{q}''']^\alpha$

Le due situazioni corrispondono rispettivamente alla formazione dello stato molecolare e del tetraquark. Si vuole mostrare, nel corso di questo capitolo, come l'interazione tra i quattro quark è favorita nella struttura tetraquark rispetto alla situazione molecolare.

2.2 Espansione 1/N

Le variabili dinamiche della QCD sono i campi fermionici dei quark, q^α e i campi di gauge indicati con $A_{\mu\beta}^\alpha$ nella rappresentazione aggiunta, con indice di colore $\alpha, \beta = 1, \dots, 3$ e indice di Lorentz $\mu = 0, \dots, 3$. I gradi di libertà quali spin, sapore e la dipendenza spazio-temporale non vengono esplicitamente riportati in quanto nel seguito viene analizzato il comportamento sotto $SU(3)$ di colore. La QCD alla scala dei quark leggeri u, d, s è una teoria fortemente interagente. E' quindi necessaria l'introduzione di uno schema approssimativo in grado di semplificare la complessità dei fenomeni che hanno fatto. Seguendo l'idea di 't Hooft [18], si può generalizzare il gruppo di simmetria di gauge $SU(3)$ della QCD al gruppo $SU(N)$, dove N indica il numero di colori. La QCD nel limite di N grande è semplificata in quanto si sviluppa in potenze $1/N$. L'espansione $1/N$ è una analisi perturbativa che può essere sviluppata fino all'ordine di interesse. Perché un tale limite porta a risultati corretti se in natura il numero di colori è $N = 3$?

In via del tutto generale una serie perturbativa sviluppata in potenze di x si scrive come $\sum_n a_n x^n$. Quanto piccolo debba essere x affinché la serie sia dominata dai primi termini

dello sviluppo dipende dall'andamento dei parametri a_n . Quindi non c'è modo di stabilire se il parametro $1/3$ sia sufficientemente piccolo per arrestare lo sviluppo all'ordine dominante se non conoscendo i coefficienti dello sviluppo. Sono le predizioni del modello nell'ambito della QCD a giustificare la bontà dello sviluppo in potenze $1/N$. E' possibile seguire il parallelismo con la teoria degli elettroni e dei fotoni, la QED. Lo sviluppo perturbativo della QED porta a predizioni teoriche in perfetto accordo con le verifiche sperimentali. In questa teoria il parametro di sviluppo è dato dalla carica elettrica $e=0.302$ in unità naturali. Dai primi ordini dello sviluppo perturbativo risulta un'espansione in potenze di $\alpha = e^2/4\pi$. Questo spiega il successo del calcolo in serie perturbativa della QED. Nella teoria della QCD si ha $N=3$, e la validità dello sviluppo in potenze $1/N$ non può essere esclusa *a priori*.

Nel seguito si introducono gli accoppiamenti tra i campi dei quark e dei gluoni. Si discute la Lagrangiana della QCD in $SU(3)$ e successivamente si studiano i diagrammi di Feynman nel limite di grande N .

2.2.1 Le interazioni in QCD

La QCD descrive i campi dei quark e le loro interazioni coi campi dei gluoni. I quark si manifestano in sei stati differenti in sapore e ognuno di essi può assumere tre diverse cariche di colore. In natura non sono state osservate cariche di colore libere, pertanto tutti gli stati adronici vengono descritti da combinazioni di campi che neutralizzano la carica di colore stessa.

La Lagrangiana della QCD si scrive come

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4g^2} \mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha} \mathcal{G}^{\mu\nu}_\alpha \quad (2.5)$$

dove la somma in f si estende su tutti i sapori u, d, s, c, t, b . La derivata covariante che compare in (2.5) contiene i campi di gauge. Ad ogni generatore corrisponde un campo di

gauge, pertanto si hanno otto campi $\mathcal{A}_{\mu,\alpha}$ indipendenti identificati dall'indice di colore α . L'indice μ indica che i campi di gauge sono campi vettoriali nello spazio di Lorentz.

$$D_\mu q_f = \partial_\mu q_f - i \sum_{\alpha=1}^8 \mathcal{A}_{\mu,\alpha} \frac{\lambda_\alpha^C}{2} q_f \quad (2.6)$$

Si osserva che l'interazione tra i campi fermionici dei quark e i campi dei bosoni vettoriali dei gluoni è diagonale nello spazio di sapore ovvero indipendente da esso. I tensori a due indici di Lorentz in (2.5) sono definiti da

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,\alpha} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,\alpha} + f_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{A}_{\mu,\beta} \mathcal{A}_{\nu,\gamma} \quad (2.7)$$

e costituiscono le componenti del tensore

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu,\alpha} \frac{\lambda_\alpha^C}{2} \quad (2.8)$$

Questo ultimo termine discusso non è presente nella teoria Abeliana quale la QED e descrive l'autointerazione dei campi di gauge. Dagli accoppiamenti della Lagrangiana della QCD si ricavano i vertici di interazione tra quark e gluoni, mostrati a sinistra in fig.(2.2). L'unico vertice proporzionale al quadrato della costante di accoppiamento g è quello a quattro gluoni (gggg), gli altri vertici di interazione, tra tre gluoni (ggg) e tra una coppia di quark e un gluone (qqg), sono lineari in g .

2.2.2 Le interazioni nel limine di grande N

Generalizzando la simmetria $SU(3)$ al gruppo $SU(N)$, la costante $1/g^2$ che pesa il termine gluonico in 2.5 viene riscritta come N/g^2 . Per stabilire quali sono i diagrammi di Feynman dominanti nel limite di grande N è conveniente introdurre la notazione basata sulle linee di colore [19], [20]. I campi dei quark q^α portano un solo indice di colore e si rappresentano con una linea orientata. Per i campi degli antiquark $\bar{q}_\alpha$ si usa l'orientazione opposta per tener conto dell'indice di colore in basso. Similmente, il colore di un gluone è espresso dagli indici α, β del campo di gauge $A_{\mu\beta}^\alpha$ nella rappresentazione aggiunta. Si

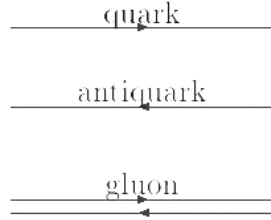


Figura 2.1: Notazione utilizzata per le linee di colore

hanno pertanto per il gluone due linee orientate in versi opposti. Le convenzioni sono mostrate in fig.(2.1).

Con queste assunzioni si possono disegnare i vertici di interazione di $SU(N)$ riportati nei due linguaggi in fig.(2.2).

Nel modello di 't Hooft si richiede che resti finito e indipendente da N il rapporto N/g^2 nel limite $N \rightarrow \infty$. Da questo segue che ogni vertice di interazione lineare nella costante di accoppiamento g deve essere riscalato di un fattore $1/\sqrt{N}$, mentre il vertice a quattro gluoni deve essere dell'ordine di $1/N$.

L'analisi del propagatore del gluone con correzione di loop gluonico chiarisce come stabilire l'ordine dei diversi diagrammi. In fig.(2.3) è mostrato lo stesso diagramma nella notazione ordinaria e nella notazione che evidenzia le linee di colore. Nel limite di grande N si hanno N quark distinti nel colore e si possono considerare N^2 stati di gluone. Fissando il colore iniziale e finale del propagatore gluonico si hanno N gluoni distinti nel loop, quindi il contributo del loop di un gluone porta un fattore N . Assegnando un fattore $1/\sqrt{N}$ ad ogni vertice, il contributo del diagramma risulta di ordine $O(1)$.

Cosa succede se vengono aggiunte altre linee gluoniche al loop? In fig.(2.4) è mostrato l'inserimento di due gluoni nel loop. Per ogni linea gluonica introdotta si aggiungono due vertici e un loop: l'ordine del grafico rimane invariato in quanto due vertici portano un contributo $1/\sqrt{N} * 1/\sqrt{N}$ e il loop contribuisce con un fattore N . Questo è vero per grafici planari.

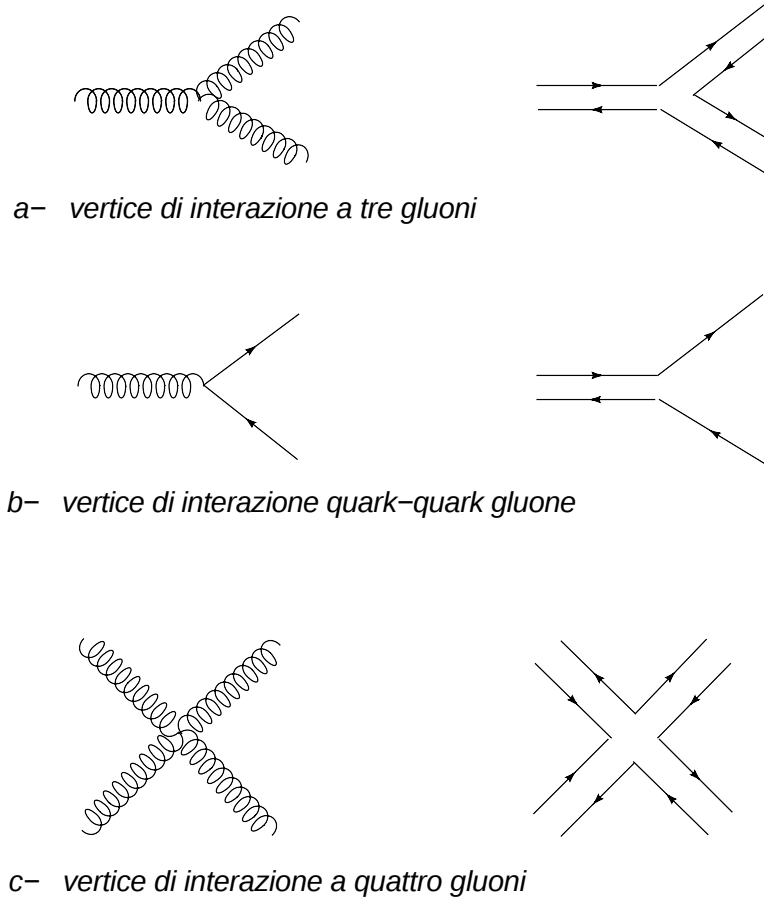


Figura 2.2: Vertici di interazione.

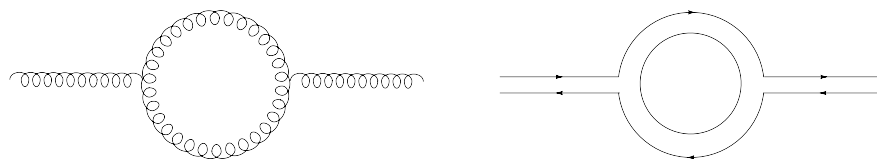


Figura 2.3: Rappresentazione del loop di gluoni secondo i diagrammi di Feynman e secondo le linee di colore.

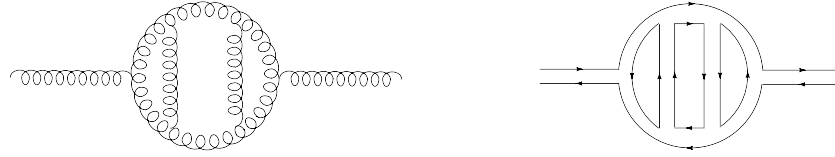


Figura 2.4: Inserimento di propagatori gluonici nel loop gluonico.

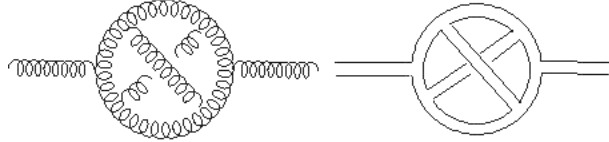


Figura 2.5: Situazione non planare.

In fig.(2.5) viene riportata una situazione non planare in quanto i gluoni all'interno del loop non sono sullo stesso piano, non hanno vertici in comune. Il numero di vertici del diagramma porta un fattore $(1/\sqrt{N})^6$ che non può essere totalmente cancellato dal contributo N del singolo loop che si ricostruisce in fig.(2.5). Pertanto tale diagramma ha contributo $(1/\sqrt{N})^6 * N = 1/N^2$ che risulta nullo nel limite N grande. Questa soppressione si ritrova per tutti i diagrammi non planari.

Una seconda importante osservazione emerge considerando il propagatore del gluone corretto con un loop fermionico, come in fig.(2.6). Questa volta il loop è percorso dai fermioni,



Figura 2.6: Propagatore gluonico con correzione di loop fermionico.

pertanto nella traduzione in linee di colore si deve considerare una singola linea. A differenza della situazione in fig.(2.3), ora le linee di colore non si chiudono a formare un loop, pertanto l'ordine del diagramma è $O(\frac{1}{N})$, dato dal contributo dei due vertici.

Le regole di selezione ricavate dagli esempi illustrati possono essere riassunte come segue:

- i diagrammi non planari sono soppressi da un fattore $\frac{1}{N^2}$;
- i loop di quark sono soppressi con un fattore $\frac{1}{N}$.

Un'ulteriore regola base segue considerando operatori di quark quali $q\bar{q}$. La situazione più semplice è quella della teoria non interagente. Il diagramma più semplice è quello del loop fermionico, percorso da N colori, pertanto di ordine $O(N)$. Se si introducono propagatori gluonici interni l'ordine del grafico non viene modificato. Infatti, come nel caso discusso precedentemente, ogni propagatore gluonico contribuisce con un fattore N , cancellato dai fattori $1/\sqrt{N}$ dei vertici necessari per l'inserimento del gluone stesso. A differenza del caso precedente, non tutti i diagrammi planari hanno lo stesso andamento in potenze $1/N$. Se in fig.(2.7) viene scambiato il quark che chiude il loop con un gluone,

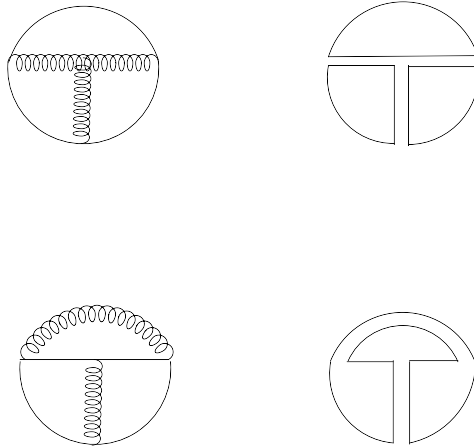


Figura 2.7: Chiusura del loop fermionico

il contributo del grafico diventa di due ordini inferiori. Il numero di vertici nel diagramma non cambia, ma nel secondo caso si ricostruisce un unico loop e le potenze di N non sono sufficienti a cancellare quelle dei vertici. La regola generale che si deduce per le forme bilineari dei quark è la seguente:

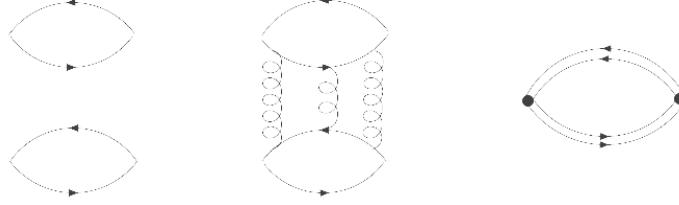


Figura 2.8: Possibili diagrammi di colore per stati a quattro quark

- i contributi dominanti sono quelli dei diagrammi planari, chiusi da linee fermioniche. Si è ora in grado di rappresentare uno stato a quattro quark utilizzando le linee di colore e stabilire quale configurazione sia favorita nell'interazione tra i quattro quark.

2.2.3 Stati a quattro quark: diagrammi dominanti

In fig.(2.8) sono mostrati i diagrammi in termini delle linee di colore per un generico stato a quattro quark. Il primo grafico raffigurato è disconnesso. Le linee di colore rappresentanti un quark si chiudono con quelle dell'antiquark. L'operatore associato a tale situazione si scrive come

$$\mathcal{O}(x) = q_\alpha \bar{q}^\alpha q_\beta \bar{q}^\beta(x) \quad (2.9)$$

L'ampiezza per la creazione di uno stato a quattro quark, espressa dal valore di aspettazione sul vuoto $\langle 0 | \mathcal{O}(x) | 0 \rangle$ si fattorizza nell'ampiezza di creare due mesoni $q\bar{q}'$. Si hanno due loop fermionici, ognuno percorso da N colori, e il contributo del diagramma risulta di ordine $O(N^2)$. Nella teoria di interazione vanno considerati i grafici connessi, ossia i due loop devono essere collegati tramite linee gluoniche. L'inserimento di un propagatore permette di collegare i quattro quark tramite un unico loop. Il fattore N del loop è cancellato dai contributi dei vertici. In questa saturazione dell'indice di colore, un quark con un antiquark, i diagrammi connessi sono soppressi di un ordine $\frac{1}{N^2}$ rispetto al caso disconnesso. Indipendentemente dal numero di gluoni scambiati i grafici connessi risultano di ordine $O(1)$.

Esiste una seconda scelta per scrivere un singoletto di colore a partire da quattro quark. I due quark possono essere raggruppati in un oggetto colorato, ossia non neutro nel colore, chiamato diquark. L'indice di colore del diquark viene saturato con l'indice di colore esplicito dell'oggetto che tiene insieme i due antiquark, chiamato antidiquark. Il singoletto di colore che ne risulta, chiamato tetraquark, si scrive come $[qq]_\alpha [\bar{q}\bar{q}]^\alpha$ ed è rappresentato in fig.(2.8) di destra. Nel linguaggio delle linee di colore, il diquark è dato da due linee che, a differenza del gluone, sono orientate nello stesso verso. L'ordine più basso del diagramma diquark-antidiquark è quello di un loop di colore, ossia ordine N.

Risulta che nel limite di N grande i contributi dominanti di stati a quattro quark provengono dagli stati legati diquark-antidiquark $[qq]_\alpha [\bar{q}\bar{q}]^\alpha$.

2.3 Stati scalari come tetraquark

Dalla discussione svolta in questo capitolo segue che nella teoria interagente la configurazione di tetraquark $[qq']_\alpha [\bar{q}''\bar{q}''']^\alpha$ è favorita rispetto alla configurazione molecolare $[q^\alpha \bar{q}'_\alpha] [q''^\beta \bar{q}'''_\beta]$. Considerando le evidenze sperimentali discusse in par.(1.3) si può scrivere la corretta composizione in quark dei mesoni scalari leggeri descritti in termini di stati legati diquark-antidiquark.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= [ud][\bar{u}\bar{d}] \\
 \kappa &= [su][\bar{u}\bar{d}], [sd][\bar{u}\bar{d}] \\
 a_0 &= [su][\bar{s}\bar{d}], \frac{[su][\bar{s}\bar{u}] - [sd][\bar{s}\bar{d}]}{\sqrt{2}}, [sd][\bar{s}\bar{u}] \\
 f_0 &= \frac{[su][\bar{s}\bar{u}] + [sd][\bar{s}\bar{d}]}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

I due quark vengono scritti nella parentesi quadra per indicare l'appartenenza al diquark. Gli antiquark costituiscono l'oggetto antidiquark, rappresentato dalla seconda parentesi quadra. L'isovettore a_0 ha tre stati distinti dalla terza componente di isospin I_3 . Lo stato f_0 costituisce un singoletto degenere in massa con lo stato a_0 . I doppietti possibili sono

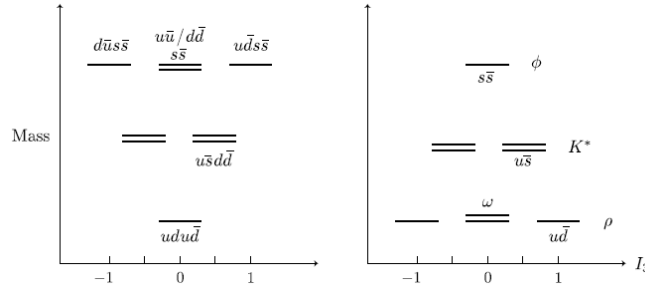


Figura 2.9: Spettri di massa previsti nel modello dei mesoni a due e quattro quark.

dati dai κ e lo stato più leggero costituito da quattro quark è la σ . Considerando le masse dei mesoni che compongono questo multipletto si osserva che lo spettro è invertito rispetto allo spettro di massa dei mesoni ordinari.

Gli stati $q\bar{q}'$ seguono la disposizione mostrata nella fig.(2.9) di destra. Alla base del nonetto si hanno i tre stati dell'isovettore $\{u\bar{d}, (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}, d\bar{u}\}$ e lo stato degenere in massa del singoletto $\{(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}\}$. Tali stati sono i più leggeri in quanto contengono solo quark u, d e nessun quark s . Agli stati leggeri costituiti da quark u, d , seguono i doppietti a stranezza $S=+1$ $\{u\bar{s}, d\bar{s}\}$ e gli stati coniugati di carica a $S=-1$. La presenza di un quark s aumenta la massa dello stato. La descrizione di uno stato più pesante richiede l'utilizzo di due quark s , pertanto l'unico stato possibile è un singoletto di isospin $\{s\bar{s}\}$.

Per stati descritti in termini di quattro quark la situazione si inverte ed è mostrata nella fig.(2.9) di sinistra. Lo stato più leggero, costituito solo da quark u, d è un singoletto di isospin $\{u\bar{d}d\bar{u}\}$. Lo stato più pesante, contenente due quark s , può essere saturato con quark u e d , in modo da formare un tripletto $\{u\bar{d}s\bar{s}, (u\bar{u} - d\bar{d})s\bar{s}/\sqrt{2}, d\bar{u}s\bar{s}\}$ e un singoletto degenere $\{(u\bar{u} + d\bar{d})s\bar{s}/\sqrt{2}\}$. Nel mezzo dello spettro si trovano gli stati con stranezza positiva $\{u\bar{s}d\bar{d}, d\bar{s}u\bar{u}\}$ e i coniugati di carica.

Risulta evidente che la naturale disposizione dei mesoni a quattro quark è invertita rispetto

ai mesoni $q\bar{q}'$.

Capitolo 3

Caratteristiche di un diquark

Lo stato legato di due quark, il diquark, viene caratterizzato dai numeri quantici di colore, spin e sapore. In questo capitolo si mostra come le forze di colore siano attrattive nel canale $\bar{\mathbf{3}}_{\mathbf{C}}$. Nell'ipotesi di eccitazione angolare nulla tra i due quark che costituiscono il diquark si trovano due possibili stati distinti dalle configurazioni di sapore e dal valore dello spin totale. Attraverso l'analisi delle forze di colore e di spin si ottiene che lo stato a spin zero è energeticamente favorito. Questo causa una differenza di massa tra lo stato diquark a spin zero e lo stato diquark a spin uno. In conclusione del capitolo si mostra come sia possibile stimare la differenza di massa tra i diquark scalari e vettoriali utilizzando i valori delle masse dei barioni noti.

Questi primi dati numerici sono utilizzati nel capitolo successivo per la stima delle masse degli stati $J^{PC} = 1^{--}$ (numeri quantici della risonanza $Y(2175)$).

3.1 Numeri quantici del diquark

Nel seguito viene mostrato come costruire formalmente un operatore di diquark. I gradi di libertà da considerare sono la carica di colore, il sapore e lo spin dei singoli quark. Lo stato di diquark viene creato da un operatore che applicato al vuoto crea un oggetto con i numeri quantici del diquark stesso. Le configurazioni a energia più bassa si

ottengono utilizzando i campi dei quark ma non le loro derivate.

Il campo del quark è un tripletto di $SU(3)$ sia nella rappresentazione di sapore che in quella di colore. Viene indicato con

$$q^{i\alpha} \quad i, \alpha = 1, \dots, 3. \quad (3.1)$$

dove gli indici i, α vanno da uno a tre e indicano rispettivamente il sapore e il colore del quark. Lo spin è fissato a $1/2$.

Il diquark è costituito da due quark e per la giusta attribuzione dei numeri quantici si devono utilizzare le leggi di composizione dei multipletti discussi nel par.(1.2.3).

3.1.1 La carica di colore

Il gruppo di simmetria del colore è $SU(3)$, quindi valgono le stesse regole di composizione discusse per la simmetria di sapore nel par.(1.2.3). I quark sono triplette di colore, pertanto componendo due quark per formare un diquark si hanno i possibili multipletti finali $\mathbf{6}$ e $\bar{\mathbf{3}}$, essendo

$$\mathbf{3}_C \otimes \mathbf{3}_C = \mathbf{6}_C \oplus \bar{\mathbf{3}}_C \quad (3.2)$$

dove con pedice C si sottolinea il colore. Di seguito viene mostrato formalmente in quali rappresentazioni le forze di colore sono attrattive. Analogamente al caso della QED, dove l'interazione tra le cariche è proporzionale al prodotto della carica elettrica, si assume che l'interazione di colore sia proporzionale alle cariche di colore e pertanto al prodotto dei generatori della simmetria $SU(3)$. Seguendo questa analogia si vuole di seguito mostrare che il canale attrattivo di $SU(3)$ è il canale antisimmetrico $\bar{\mathbf{3}}_C$. I risultati ottenuti per le altre possibili rappresentazioni sono riassunti a fine paragrafo nella tab.(3.1), preceduti dai dettagli matematici riportati di seguito.

Sebbene le simmetrie di colore e sapore seguano la stessa matematica, c'è una profonda differenza tra le due. Mentre il sapore è una simmetria approssimata basata sulla vicinanza

dei valori delle masse, il colore è la vera simmetria delle interazioni forti. In fig.(3.1) viene mostrato lo scambio di gluone tra due quark. Nei vertici di interazione si hanno i

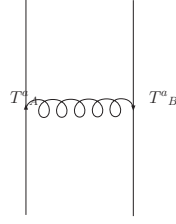


Figura 3.1: Interazione tra quark per scambio di gluone.

generatori di $SU(3)$ di colore: le matrici 3×3 T_A^a . L'indice $a = 1, \dots, 8$ identifica uno degli otto generatori di $SU(3)$. Il pedice A identifica il tipo di particella, quark o antiquark, ovvero la rappresentazione alla quale appartiene (**3** o $\bar{\mathbf{3}}$ rispettivamente). Analogamente al caso elettromagnetico in cui il carattere della forza tra le cariche elettriche (attrattivo o repulsivo) è proporzionale al prodotto di delle loro cariche (generatori della simmetria $U(1)$ elettromagnetica), si può considerare il carattere della forza di colore proporzionale al prodotto dei generatori della simmetria $SU(3)$. Pertanto se, come spiegato di seguito, l'operatore di Casimir associato alla quantità

$$I \propto \sum_a T_A^a T_B^a \quad a = 1, \dots, 8; \quad A, B = 3, \bar{3} \quad (3.3)$$

risulta positivo, la forza nel canale dato dalla composizione delle rappresentazioni A e B è repulsiva, altrimenti si parla di canale attrattivo. A rigore l'indice a potrebbe essere diverso tra particella iniziale nello stato A e finale nello stato B . La somma è effettuata su un unico indice in quanto il contributo del propagatore del gluone fissa l'indice. Lo stato risultante dalle due particelle è dato dal prodotto tensoriale degli stati che descrivono le singole particelle. I generatori T^a dello stato a due particelle sono dati dalla somma dei generatori delle rappresentazioni dello stato A e B .

$$T_{A \otimes B}^a = T_A^a \otimes \mathbf{I}_B + \mathbf{I}_A \otimes T_B^a. \quad (3.4)$$

Quadrando e invertendo la relazione (3.4) in favore del doppio prodotto si ottiene:

$$T_A^a T_B^a = \frac{1}{2}(T^{a2} - T_A^{a2} - T_B^{a2}) \quad (3.5)$$

dalla quale è possibile ottenere l'informazione sul tipo di forza nel determinato canale. Dalla sua definizione (3.4) segue che $T^{a2} = \sum_a T^a T^a$ è un operatore commutante con tutti i generatori di SU(3):

$$\begin{aligned} [(T_A^a + T_B^a)^2, T_A^b] &= (T_A^a + T_B^a)[(T_A^a + T_B^a), T_A^b] + [(T_A^a + T_B^a), T_A^b](T_A^a + T_B^a) \\ &= (T_A^a + T_B^a)[T_A^a, T_A^b] + [T_A^a, T_A^b](T_A^a + T_B^a) \\ &= (T_A^a + T_B^a)if^{abc}T_A^c + if^{abc}T_A^c(T_A^a + T_B^a) \\ &= if^{abc}T_A^a T_A^c + if^{abc}T_A^c T_A^a = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

dove sono state usate le proprietà di antisimmetria nei tre indici a, b, c delle costanti di struttura f^{abc} definire dalla relazione:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (3.7)$$

e le proprietà di commutazione di generatori di rappresentazioni differenti:

$$[T_A^a, T_B^b] = 0. \quad (3.8)$$

Se un generatore, nel caso T^{a2} , commuta con tutti i generatori di una rappresentazione irriducibile, quali i generatori delle rappresentazioni A e B, prende il nome di operatore di Casimir. Per il lemma di Shur, un tale operatore è proporzionale alla matrice Identità e si può porre

$$T^{a2} = C(D)\mathbf{I} \quad (3.9)$$

dove D indica la rappresentazione risultante dalla combinazione delle rappresentazioni che originano $T^a = T_A^a + T_B^a$, e C è una costante dipendente dalla dimensione D. E' quindi

possibile studiare la forza di colore noti i coefficienti $C(D)$, infatti usando la (3.9), la (3.3) si riscrive come

$$I \propto \frac{1}{2}(C(D) - C(A) - C(B)) \quad (3.10)$$

I coefficienti $C(D)$ delle diverse rappresentazioni si possono calcolare come segue [21]. La normalizzazione dei generatori di una rappresentazione D è fissata dalla traccia

$$\text{Tr}(T_D^a T_D^b) = k_D \delta_{ab} \quad (3.11)$$

dove k_D è una costante dipendente dalla generica rappresentazione D . Applicando questa definizione ad un operatore di Casimir risulta

$$\begin{aligned} \sum_a \text{Tr}(T_D^a T_D^a) &= \sum_a k_D \delta^{aa} = 8k_D \\ &= \text{Tr} T_D^a{}^2 = C(D) \text{Tr} \mathbf{I} = \mathbf{C}(\mathbf{D}) \dim(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

e si trova la relazione per i coefficienti

$$C(D) = \frac{8k_D}{\dim(D)}. \quad (3.13)$$

Le ultime due relazioni che verranno utilizzate sono legate alle composizione delle rappresentazioni.

$$k_{A \oplus B} = k_A + k_B \quad (3.14)$$

$$k_{A \otimes B} = \dim(A)k_B + \dim(B)k_A \quad (3.15)$$

La relazione (3.15) segue direttamente dalla definizione di somma diretta di due rappresentazioni D_1 e D_2

$$D = D_1 \oplus D_2 = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare la seconda relazione si può svolgere il prodotto tensoriale tra le rappresentazioni A e B.

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(T^a T^a) &= \text{Tr}(T_{A \otimes B}^a T_{A \otimes B}^a) = \text{Tr}(T_A^a \otimes I_B + I_A \otimes T_B^a)(T_A^b \otimes I_B + I_A \otimes T_B^b) = \\
&= \text{Tr}(T_A^a T_A^b) \text{Tr}(I_B) \\
&+ \text{Tr}(T_A^a) \text{Tr}(T_B^b) + \text{Tr}(T_A^b) \text{Tr}(T_B^a) \\
&+ \text{Tr}(I_A) \text{Tr}(T_B^a T_B^b) \\
&= k_A \delta^{ab} \dim(B) + \dim(A) k_B \delta^{ab}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dove è stata utilizzata la (3.11) e la proprietà, valida per tutti i generatori, secondo cui $\text{Tr}(T_D^a) = 0$. La relazione (3.15) è presto dimostrata se si uguagliano il primo e l'ultimo membro di quanto appena ricavato. Risulta

$$\delta^{ab} k_{A \otimes B} = k_A \delta^{ab} \dim(B) + \dim(A) k_B \delta^{ab} \tag{3.17}$$

Il primo passo per stimare la forza di colore nei canali risultanti dalla combinazione di due quark è valutare i coefficienti k_D .

Dalla legge di composizione

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}, \tag{3.18}$$

ricordando che la traccia di due generatori di SU(3) è normalizzata con $k_3 = \frac{1}{2}$ si ricava il coefficiente $k_6 = \frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}
k_{3 \otimes 3} &= 3k_3 + 3k_3 = 3 \\
&= k_{6 \oplus \bar{3}} = k_6 + k_3
\end{aligned} \tag{3.19}$$

E' utile ricavare anche il coefficiente k_8 attraverso la legge di composizione di una rappresentazione fondamentale $\mathbf{3}$ e di una antifondamentale $\bar{\mathbf{3}}$

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \tag{3.20}$$

$D = A \otimes B$	1	$\bar{3}$	6	8
k_D	0	$1/3$	$5/2$	3
$C(D)$	0	$4/3$	$10/3$	3
$I = \frac{1}{2}(C(D) - C(A) - C(B))$	$-4/3$	$-2/3$	$1/3$	$1/6$

Tabella 3.1: forze di colore attrattive e repulsive

Procedendo come nella (3.19) si ottiene

$$\begin{aligned}
 k_{3\otimes\bar{3}} &= 3k_3 + 3k_{\bar{3}} = 3 \\
 &= k_{1\oplus 8} = k_1 + k_8
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Osservando che per la rappresentazione di singoletto si ha $k_1 = 0$, si calcola $k_8 = 3$.

Il calcolo dei fattori $C(D)$ è immediato utilizzando l'eq.(3.13) e i valori sono riassunti nella tab.(3.1). E' noto fenomenologicamente che le forze di colore debbano essere fortemente attrattive nel singoletto di colore fra un quark e un antiquark. Tuttavia questo non è l'unico canale nel quale ci possa essere attrazione. Una seconda possibile configurazione di quark legati insieme è data dall'antitripletto di colore $\bar{3}$. Per ottenere la rappresentazione $\bar{3}$ è necessario combinare due rappresentazioni fondamentali. Questa è esattamente la situazione del diquark: due quark costituiscono uno stato legato dalla forza di colore se sono nella rappresentazione $\bar{3}$. E' lecito considerare anche il canale simmetrico **6** che risulta dalla composizione di due quark, ma questo canale non è favorito per via del segno positivo dell'interazione. Si consideri che in tutta la discussione non si è tenuto in conto che l'interazione fra quark debba presentare anche una dipendenza dalla distanza fra i quark stessi. Le considerazioni gruppali riportate hanno un carattere indicativo. Per informazioni più determinanti sulla formazione e sulla natura dei diquark si ricorre alle soluzioni della QCD non perturbativa fornite, per esempio, dall'approccio numerico del reticolo.

3.1.2 La composizione del sapore

Per la composizione delle rappresentazioni di sapore di due quark si ha

$$\mathbf{3}_f \otimes \mathbf{3}_f = \mathbf{6}_f \oplus \bar{\mathbf{3}}_f \quad (3.22)$$

Sebbene le rappresentazioni di sapore possibili per i diquark siano le stesse che nel colore non c'è motivo di averne una favorita rispetto all'altra. Dal punto di vista del sapore si hanno nove stati. I sei possibili stati simmetrici si scrivono come $\{uu, dd, ss, (ud +$

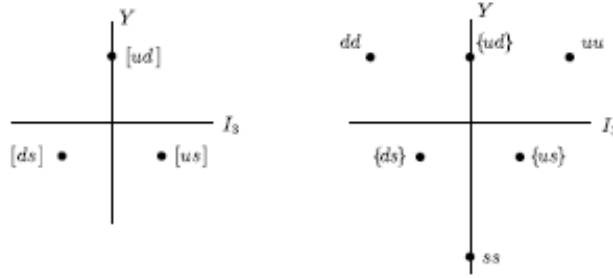


Figura 3.2: Diagramma dei pesi delle rappresentazioni $\bar{\mathbf{3}}_f$ e $\mathbf{6}_f$

$du)/\sqrt{2}, (ds+sd)/\sqrt{2}, (su+us)/\sqrt{2}\}$. Gli stati antisimmetrici sono tre $\{(ud-du)/\sqrt{2}, (ds-sd)/\sqrt{2}, (su-us)/\sqrt{2}\}$. Il diagramma dei pesi delle due rappresentazioni è mostrato in fig.(3.2).

3.1.3 Composizione di spin

L'accoppiamento di spin dello stato qq si può riportare al più familiare accoppiamento tra bilineari di Dirac $\bar{q}q$. A tal fine uno dei due campi dei quark è sostituito dal campo coniugato di carica $qq \rightarrow \bar{q}_C q$, dove $\bar{q}_C = q^T \sigma^2 \gamma_5 = -q^T \gamma^2 \gamma^0$. L'operatore di coniugazione di carica è dato da $C = \gamma^2 \gamma^0$.

Il gruppo di simmetria dello spin è $SU(2)$ e la rappresentazione fondamentale si indica con $\mathbf{2}$. Dalla legge di composizione

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \quad (3.23)$$

	$S=I$	$P = \gamma^5 I$	$V = \gamma^\mu$	$A = \gamma^5 \gamma^\mu$	$T = \sigma^{\mu\nu}$
η_P	+1	-1	$g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu}$	$g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$
η'_P	-1	+1	$-g^{\mu\mu}$	$+g^{\mu\mu}$	$-g^{\mu\mu} g^{\nu\nu}$

Tabella 3.2: proprietà dei bilineari sotto l'azione della Parità

risulta che lo stato di due fermioni a spin $1/2$ può essere un singoletto di spin $|1_S\rangle$, a spin totale zero, oppure un tripletto di spin $|3_S\rangle$, a spin totale uno. Il diquark a spin totale nullo viene anche chiamato scalare. Quello a spin totale uno, vettoriale. Il passaggio al campo coniugato di carica è particolarmente utile per stabilire la parità del diquark. I bilineari di Dirac $\bar{q}\Gamma q$, con $\Gamma = S, P, V, A, T$, hanno proprietà di trasformazione sotto l'operatore di Parità definite dal segno η_P , come riassunto in tab.(3.2). Per definire le proprietà del diquark un campo fermionico è stato sostituito col campo coniugato di carica. Ricordando che particella e antiparticella hanno parità opposta risulta che gli operatori $\bar{q}_C\Gamma q$ che definiscono i diquark hanno parità opposta rispetto ai bilineari di Dirac $\bar{q}\Gamma q$. La parità del diquark, indipendentemente dallo spin totale, può essere sia positiva che negativa. La parità di uno stato composto da due particelle è data dal prodotto delle parità intrinseche dei due costituenti moltiplicata per il fattore $(-1)^L$, dove L è il momento angolare orbitale relativo. Nel caso del diquark il prodotto delle parità intrinseche è positivo, trattandosi dello stesso tipo di particelle, ed il fattore che determina la parità dello stato è L . Un diquark a parità positiva necessita momento angolare relativo nullo, viceversa per descrivere un diquark a parità negativa si deve assumere un' unità di eccitazione angolare tra i quark che lo costituiscono.

3.1.4 Antisimmetrizzazione

Sono stati discussi singolarmente tutti i numeri quantici del diquark. La funzione d'onda totale dello stato di due fermioni deve, in base alla statistica di Fermi, essere totalmente antisimmetrica rispetto allo scambio delle particelle. I possibili stati del diquark

Spin e Parità	(Sapore, Colore)	Operatore	L
0^+	$(\bar{3}, 3) (6, 6)$	$\bar{q}_C \gamma^5 q, \bar{q}_C \gamma^0 \gamma^5 q$	0
1^+	$(\bar{3}, 6) (6, \bar{3})$	$\bar{q}_C \vec{\gamma} q, \bar{q}_C \sigma^{0i} q$	0
0^-	$(\bar{3}, 6) (6, \bar{3})$	$\bar{q}_C q, \bar{q}_C \gamma^0 q$	1
1^-	$(\bar{3}, 3) (6, 6)$	$\bar{q}_C \vec{\gamma} \gamma^5 q, \bar{q}_C \sigma^{ij} q$	1

Tabella 3.3: proprietà dei bilineari sotto l'azione della Parità

sono riportati in tab.(3.3) e sono otto [22]. Fra questi soltanto due configurazioni sono energeticamente favorite. La richiesta del canale $\bar{\mathbf{3}}_C$ nel colore elimina quattro possibili stati, altri due vengono soppressi dalla richiesta momento angolare orbitale nullo, ovvero dall'assunzione che la configurazione energeticamente favorevole si abbia con i due quark a riposo l'uno rispetto all'altro. Di seguito verranno considerate soltanto le due combinazioni

$$\begin{aligned}
& |\bar{\mathbf{3}}_C(A) \bar{\mathbf{3}}_f(A) 0^+(A) \rangle \\
& |\bar{\mathbf{3}}_C(A) 6_f(S) 1^+(S) \rangle
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nelle parentesi si indica con A la rappresentazione antisimmetrica e con S quella simmetrica, combinate in modo da formare uno stato antisimmetrico. Le rimanenti configurazioni riportate in tab.(3.3) sono permesse dai numeri quantici, ma non verranno esplicitamente considerate in quanto segue perchè sono configurazioni meno stabili.

3.2 Diquark 'bad' e 'good'

I diquark introdotti nell'eq.(3.24) vengono spesso indicati coi nomi di 'good' e 'bad'. La assegnazione di tali nomi risiede nelle proprietà di formazione e stabilità del diquark in questione, studiate, ad esempio, tramite il calcolo numerico su reticolo. Un conto algebrico per motivare la configurazione favorevole $|\bar{\mathbf{3}}_C(A) \bar{\mathbf{3}}_f(A) 0^+(A) \rangle$ si basa sulle forze di spin e di colore che mediano l'interazione tra due quark. In fig.(3.3) viene mostrata

l'interazione per scambio di gluone. Tale situazione è semplificativa ed è basata sulla teoria delle perturbazioni. Si può scrivere l'Hamiltoniana effettiva che descrive lo scambio

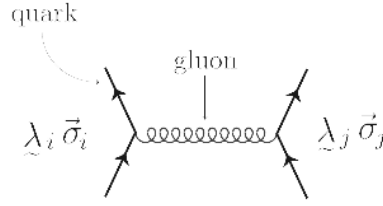


Figura 3.3: Interazione tra quark per scambio di gluone.

di gluone tra due quark, considerando gli operatori di spin e di colore dei quark stessi. E' utile esprimere l'Hamiltoniana in termini degli operatori di scambio $P_{12}^C, P_{12}^S, P_{12}^f$ dei numeri quantici di colore, spin e sapore dei due fermioni. Diagonalizzando sulle due configurazioni di diquark favorite dalle forze di colore e a eccitazione angolare nulla, si ottiene che la configurazione $|\bar{3}_C(A)\bar{3}_f(A)0^+(A)\rangle$ è energeticamente favorita. Nel seguito di questo paragrafo vengono dimostrate le affermazioni testè riportate.

L'Hamiltoniana effettiva che tiene conto delle forze di spine ed di colore è data dalla sommatoria

$$H_{\text{eff}} \propto - \sum_{i \neq j} \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \quad (3.25)$$

dove le matrici di Pauli $\vec{\sigma}_i$ sono gli operatori di spin del quark i e analogamente le matrici di Gell-Mann $\vec{\lambda}_i$ sono gli operatori di colore dello stesso quark. La somma si estende su tutte le coppie di quark interagenti. Ricordando che per il momento magnetico dell'elettrone si ha

$$\vec{\mu} \propto \frac{e}{2m} \vec{\sigma} \quad (3.26)$$

dove m è la massa dell'elettrone ed e la sua carica, si può generalizzare la (3.26) al caso del quark, tenendo conto della carica frazionaria Q

$$\frac{e}{2m} Q \vec{\sigma} \quad (3.27)$$

dove m rappresenta la massa del quark. Gli operatori di spin sono quindi pesati da termini inversamente proporzionali alla massa del quark.

Due particelle a spin $1/2$ si combinano in modo da dare uno stato finale a spin totale zero oppure uno. Lo stato antisimmetrico si scrive come $\{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}\}$ e i tre stati simmetrici come $\{\uparrow\uparrow, (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2}, \downarrow\downarrow\}$. L'azione dell'operatore $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$, dove con 1 e 2 si distinguono i due fermioni, sugli stati a spin zero ha autovalore -3

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \frac{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}{\sqrt{2}} &= (\sigma_1^x \cdot \sigma_2^x + \sigma_1^y \cdot \sigma_2^y + \sigma_1^z \cdot \sigma_2^z) \frac{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow = \\ &= -3 \frac{(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)}{\sqrt{2}}\end{aligned}\quad (3.28)$$

In quanto l'azione delle singole matrici di Pauli sugli stati a spin definito, ottenute analogamente al caso esplicitamente mostrato,

$$\sigma^x \uparrow = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow$$

sono le seguenti

$$\sigma^x \uparrow = \downarrow \quad \sigma^y \uparrow = i \downarrow \quad \sigma^z \uparrow = \uparrow \quad (3.29)$$

$$\sigma^x \downarrow = \uparrow \quad \sigma^y \downarrow = -i \uparrow \quad \sigma^z \downarrow = -\downarrow \quad (3.30)$$

L'operatore di scambio degli spin dei due fermioni deve avere come autostati il singoletto antisimmetrico $|1_S\rangle$ e il tripletto di spin $|3_S\rangle$ simmetrico con autovalori rispettivamente '+-' e '-+'. L'operatore P_{12}^S definito dall'espressione [23],

$$P_{12}^S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad (3.31)$$

applicato sugli stati scalari e vettoriali soddisfa le giuste proprietà di scambio

$$\begin{aligned}P_{12}^S |1_S\rangle &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-3)\right] |1_S\rangle = -1 |1_S\rangle \\ P_{12}^S |3_S\rangle &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(+1)\right] |3_S\rangle = +1 |3_S\rangle\end{aligned}\quad (3.32)$$

Per i gradi di libertà di sapore e di colore si possono costruire operatori del tutto analoghi

$$\begin{aligned} P_{12}^f &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \vec{\beta}_1 \cdot \vec{\beta}_2 \\ P_{12}^C &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \vec{\lambda}_1 \cdot \vec{\lambda}_2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove si usa una nomenclatura differente per le matrici che operano lo scambio delle particelle per sottolineare che agiscono su due spazi diversi. L'azione di P_{12}^f, P_{12}^C sugli stati simmetrici ($6_f, 6_C$) e antisimmetrici ($\bar{3}_f, \bar{3}_C$) è riassunta dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} P_{12}^f |6_f\rangle &= +1 |6_f\rangle & P_{12}^f |\bar{3}_f\rangle &= -1 |\bar{3}_f\rangle \\ P_{12}^C |6_C\rangle &= +1 |6_C\rangle & P_{12}^C |\bar{3}_C\rangle &= -1 |\bar{3}_C\rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

Riscrivendo l'Hamiltoniana effettiva introdotta in (3.25) in termini degli operatori di scambio si ottiene

$$H_{eff} \propto -\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = -4P_{12}^C P_{12}^S + \frac{4}{3} P_{12}^S + 2P_{12}^C - \frac{2}{3} \quad (3.35)$$

I diquark in considerazione sono a momento angolare totale nullo, perciò la funzione d'onda negli indici di spin, colore, sapore deve essere antisimmetrica. Questo porta alla relazione tra gli operatori di scambio dei tre numeri quantici

$$P_{12}^C P_{12}^S P_{12}^f = -1, \quad P_{12}^C P_{12}^S = -P_{12}^f \quad (3.36)$$

e permette di riscrivere l'eq.(3.35) come

$$H_{eff} = 4P_{12}^f + \frac{4}{3} P_{12}^S + 2P_{12}^C - \frac{2}{3} \quad (3.37)$$

Il fattore 4 dell'operatore P_{12}^f indica che il contributo dominante nell'Hamiltoniana effettiva è legato alla parte di sapore. Questo significa che le interazioni di spin e di colore portano ad una differenza di massa tra diquark dal differente contenuto in sapore.

Calcolando il valore dell'Hamiltonian effettiva sugli stati dei diquark 'bad' e 'good' definiti in eq.(3.24) si ha

$$\begin{aligned}\Delta E_{|\bar{3}_C(A)\bar{3}_f(A)0^+(A)\rangle} &= -8 \\ \Delta E_{|\bar{3}_C(A)6_f(S)1^+(S)\rangle} &= +\frac{8}{3}\end{aligned}\tag{3.38}$$

Lo stato separatamente antisimmetrico nei tre indici è più attrattivo rispetto allo stato simmetrico in sapore e colore.

Risulta pertanto che il diquark $|\bar{3}_C(A)\bar{3}_f(A)0^+(A)\rangle$, chiamato 'good' è energicamente favorito ed è più stabile del diquark $|\bar{3}_C(A)6_f(S)1^+(S)\rangle$ chiamato 'bad'.

3.2.1 Barioni in termini di diquark

I risultati ottenuti nella sezione precedente possono essere usati per spiegare le differenze in massa tra barioni con le stesse composizioni in termini di sapore dei quark. Il risultato più sorprendente riguarda i barioni strani più leggeri [24]. Le particelle Λ^0 e Σ^0 hanno rispettivamente masse 1116 MeV e 1192 MeV, differenti per 76 MeV. In entrambi i casi il contenuto in quark è uds e, assumendo nulla l'eccitazione orbitale tra i quark, lo spin totale coincide col valore di $J = 1/2$ di Λ^0 e Σ^0 . I due barioni differiscono per l'isospin totale

$$|\Sigma^0\rangle \simeq |(ud)^{I=1}s\rangle \qquad |\Lambda^0\rangle \simeq |(ud)^{I=0}s\rangle \tag{3.39}$$

portato esclusivamente dai quark u, d . La composizione degli isospin dei quark segue le regole di composizione dello spin e gli stati che si ottengono combinando due particelle a isospin $I = 1/2$ sono $I = 0$ e $I = 1$. Queste corrispondono rispettivamente alla antisimmetria e simmetria in sapore dello stato. L'interazione cromomagnetica è inversamente proporzionale alle massa dei quark. Per tal motivo l'interazione dominante è quella della coppia di quark leggeri u, d ; le altre coppie di quark sono us e sd e in entrambi i casi il quark con s causa una soppressione della forza.

A questo punto è sufficiente ricorrere alle (3.38) per giustificare la differenza in massa dei due barioni. Il contributo cromomagnetico della coppia di quark u, d nel singoletto antisimmetrico di isospin $I = 0$, legata a formare un diquark, è attrattivo. Lo stesso contributo nel canale simmetrico 6_f di sapore, corrispondente all'isospin $I = 1$ è repulsivo. Da quanto esposto si può giustificare la massa inferiore della particella Λ , contenente un diquark 'good', rispetto la massa del barione Σ^0 , contenente un diquark 'bad'.

Un'altra coppia di barioni con la stessa composizione di quark e diverso valore di massa è data da (p, Δ) . I due fermioni differiscono per lo spin totale, rispettivamente $1/2$ e $3/2$. I tre quark che costituiscono un barione, indipendentemente dal valore dello spin del barione stesso, devono necessariamente essere a coppie nella configurazione $\bar{3}_C$ di colore. Il quark rimanente è un tripletto di colore. In questo modo, essendo $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ si realizza il singoletto di colore rappresentato dal barione.

Se lo spin totale del barione è $3/2$, lo spin totale tra due qualsiasi quark deve essere uguale a uno. Questo equivale a richiedere una rappresentazione 3_S per ogni coppia di spin, ovvero una configurazione simmetrica nello spin. Lo stato simmetrico in spin e sapore e antisimmetrico in colore è $|\bar{3}_C(A)6_f(S)1^+(S)\rangle$. Il contributo delle forze di spin e di colore è positivo, come risulta dalla (3.38).

Se lo spin totale del barione è $1/2$, lo spin totale tra due qualsiasi quark non è necessariamente uno. Una configurazione possibile è quella a spin nullo tra due quark, ovvero si ha lo stato $|\bar{3}_C(A)\bar{3}_f(A)0^+(A)\rangle$ antisimmetrico nello spin, che, in base alla (3.38), abbassa il valore della massa dello stato. Risulta quindi che, a parità di contenuto in sapore di quark, il multipletto dei barioni a spin $1/2$ è energicamente favorito rispetto al multipletto a spin $3/2$. Questo giustifica la differenza di massa dei due multipletti.

In conclusione si osserva come la differenza di masse dei membri dei multipletti dei barioni

a spin $3/2$ e a spin $1/2$ diminuisce con l'aumentare in massa dei quark.

$$\begin{aligned}
 M(\Delta) - M(p) &\sim 290 \text{ MeV} \\
 M(\Sigma^*) - M(\Lambda) &\sim 260 \text{ MeV} \\
 M(\Xi^*) - M(\Xi) &\sim 215 \text{ MeV}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Come previsto dalla eq.(3.27) la differenza in massa tra gli adroni diminuisce con l'aumentare della massa dei quark: un modello per spiegare di quanto diminuisca è argomento del prossimo paragrafo.

3.2.2 Le masse dei diquark

E' stato più volte affermato che la configurazione energeticamente favorita del diquark è quella scalare, a spin totale nullo. Questo equivale a dire che esiste una differenza di massa tra il diquark scalare e vettoriale. Di seguito se ne fornisce una stima [22].

Per lo studio delle proprietà dei diquark è necessario introdurre un quark pesante Q che generi un campo di colore statico, in modo da neutralizzare la carica di colore del diquark. Per distinguerne lo spin si adotta la scrittura $[qq]$ per spin totale del diquark nullo e $\{qq\}$ per spin del diquark uno. Le masse dei fermioni a tre quark che si possono costruire, $[qq]Q$ e $\{qq\}Q$ sono uguagliate a masse di barioni noti, con la stessa composizione in quark. Per il calcolo della massa di un diquark a spin zero si usa il barione $[qq]Q$ con $J = 1/2$, per la massa del diquark vettore si ha a disposizione sia il barione $\{qq\}Q$ a $J = 1/2$, che lo stato eccitato a $J = 3/2$. Infatti nel secondo caso la composizione dello spin uno del diquark e dello spin $1/2$ del quark pesante portano a due spin totali possibili, corrispondenti a J totale fissato nella ipotesi di eccitazione angolare nulla tra quark e diquark ($L = 0$). Quindi per il calcolo di $M[u, d]|Q$ si usa il barione Λ_Q , dove il pedice Q si riferisce alla scelta del quark pesante. Dalle masse dei barioni Σ_Q e Σ_Q^* si può ricavare il valore di $M\{u, d\}|Q$. La massa del barione è data dalla somma delle masse del diquark e del quark

pesante e, per i diquark di tipo vettore, dal termine aggiuntivo dovuto all'interazione spin-spin tra il diquark e il quark pesante. In formule si ha:

$$H_{(\{q_1 q_2\}, Q)} = K(\{q_1 q_2\}, Q) 2\vec{S}_{\{q_1 q_2\}} \cdot \vec{S}_Q \quad (3.41)$$

dove K è una costante incognita funzione delle masse dei fermioni che compongono il barione e il fattore 2 è convenzionale. Per le masse dei barioni risulta

$$\begin{aligned} M(\Lambda_Q) &= m([u, d]) + M(Q) \\ M(\Sigma_Q^{J=1/2}) &= m(\{u, d\}) + M(Q) - 2K \\ M(\Sigma_Q^{*J=3/2}) &= m(\{u, d\}) + M(Q) + K \end{aligned} \quad (3.42)$$

dove è stata usata la relazione che lega gli operatori

$$(\vec{s} + \vec{S})^2 = \vec{J}^2 = \vec{s}^2 + \vec{S}^2 + 2\vec{s} \cdot \vec{S} \quad (3.43)$$

per stimare gli autovalori corrispondenti ai due valori di J

$$2s \cdot S = J(J+1) - s(s+1) - S(S+1) \rightarrow \begin{cases} J = 1/2 & 2s \cdot S = -2 \\ J = 3/2 & 2s \cdot S = +1 \end{cases}$$

Per ottenere una stima della differenza di massa tra il diquark vettoriale e scalare, si devono considerare combinazioni lineari delle masse dei barioni che eliminino il contributo dell'interazione di spin, non essendo noti i valori di K . La differenza di massa $M(\Sigma^*) - M(\Sigma)$ è data proprio dall'interazione di spin, essendo la composizione in termini di quark uguale per i due barioni.

$$M(\Sigma^*) - M(\Sigma) = m(\{u, d\}) + M(Q) + K - (m(\{u, d\}) + M(Q) - 2K) = 3K(\{u, d\}) \quad (3.44)$$

Per eliminare il coefficiente K è sufficiente prendere la combinazione $2M(\Sigma^*) + M(\Sigma)$, come segue dalla (3.42). In questo modo si ottiene la stima della differenza di masse dei

diquark nel campo esterno generato da Q

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \left[2M(\Sigma_Q^*) + M(\Sigma_Q) \right] - M(\Lambda_Q) = \\ & \frac{1}{3} \left[2 \left(m(\{u, d\}) + M(Q) \right) + m(\{u, d\}) + M(Q) \right] - m([u, d]) - M(Q) = \\ & m(\{u, d\}) - m([u, d]) \end{aligned} \quad (3.45)$$

In modo analogo si ottengono le differenze in masse dei diquark con contenuto in stranezza non nullo. I barioni da considerare sono i seguenti: $\Xi_Q = ([u, s]Q)^{J=1/2}$, $\Xi'_Q = (\{u, s\}Q)^{J=1/2}$, $\Xi_Q^* = (\{u, s\}Q)^{J=3/2}$, $\Omega_Q = (\{s, s\}Q)^{J=1/2}$. La differenza in massa tra i barioni Ξ e Ξ' , con lo stesso contenuto in quark e valore di J , non può essere attribuita al diverso valore di isospin come fatto per la differenza in massa dei barioni Λ e Σ . Infatti gli unici quark raggruppati dalla simmetria di isospin sono i quark u, d : risulta quindi che entrambe la Ξ e la Ξ' hanno $I = 1/2$. Lo stesso valore di J può essere ottenuto sia a partire dal diquark scalare che dal diquark vettoriale, pertanto il barione Ξ più leggero viene spiegato in termini di diquark a spin zero, mentre il barione Ξ' possiede due quark legati a formare un diquark a spin uno.

Per eliminare la dipendenza dal coefficiente K nei diquark contenenti il quark s è necessario assumere le seguenti medie per i diquark vettoriali

$$\begin{aligned} m(\{u, s\}) &= \frac{m(\{s, s\}) + m(\{u, d\})}{2} \\ K(\{u, s\}, Q) &= \frac{K(\{u, d\}, Q) + K(\{s, s\}, Q)}{2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

in modo da isolare la dipendenza dal parametro K

$$2M(\Xi^*) - M(\Omega) - M(\Sigma) = 6K(\{u, s\}) \quad (3.47)$$

e ottenere la relazione tra le masse dei barioni noti.

$$\frac{2}{3} \left(M(\Xi_Q^*) + M(\Sigma_Q) + m(\Omega_Q) \right) - M(\Xi_Q) - M(\Xi'_Q) = m(\{u, s\}) - m([u, s]) \quad (3.48)$$

Nel caso del diquark costituito da quark leggeri u, d si può effettuare il calcolo sia nel campo esterno del quark s , che nel campo del quark c

$$\begin{aligned} m(\{u, d\})|s - m([u, d])|s &= 205 \text{ MeV} \\ m(\{u, d\})|c - m([u, d])|c &= 212 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (3.49)$$

ottenendo valori molto vicini, poco influenzati dall'assunzione del quark esterno. Applicando la (3.48) si ottiene

$$m(\{u, s\})|c - m([u, s])|c = 152 \text{ MeV} \quad (3.50)$$

Le masse dei barioni con contenuto di quark b ad oggi note non sono sufficienti per effettuare il calcolo nel campo generato da $Q = b$. La differenza delle masse dei due diquark ha origine nella diversa interazione di spin e questo spiega perchè sostituendo un quark leggero d , con un quark più pesante s si ha una diminuzione della differenza. Si osserva che i valori in (3.49,3.50) sono del tutto confrontabili con le differenze in massa degli adroni stimate in (3.40). Il modello presentato viene generalmente indicato come 'modello a quark costituenti'. La massa degli adroni è stimata a partire dalle masse dei quark che formano l'adrone stesso e l'interazione principale tenuta in considerazione è di natura cromomagnetica. L'ottimo accordo tra i valori sperimentali e le stime teoriche del modello giustificano la bontà dell'approccio che verrà usato nel prossimo capitolo per la stima delle masse dei mesoni nel modello a quattro quark.

Si possono in conclusione ricavare, dalla (3.44) e dalla (3.47), i valori degli accoppiamenti di spin dei diquark vettoriali.

$$\begin{aligned} K(\{u, d\}, s) &= 64 \text{ MeV} \\ K(\{u, d\}, c) &= 21 \text{ MeV} \\ K(\{u, s\}, c) &= 24 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (3.51)$$

L'interazione del diquark leggero nel campo del quark c , più pesante del quark s , risulta meno intensa. Ancora una volta si ritrova quantitativamente la corretta predizione qualitativa sull'andamento dei coefficienti K .

Capitolo 4

L'Hamiltoniana degli stati tetraquark

1^{--}

Per fornire un'interpretazione in termini di stato a quattro quark del mesone $Y(2175)$ è necessario andare oltre il modello a quark costituenti discusso nel capitolo precedente. Infatti per tener conto della massa superiore ai 2 GeV è necessario considerare, oltre gli accoppiamenti di spin, anche l'effetto dell'eccitazione angolare tra il diquark e l'antidiquark. Per stimare i livelli energetici del tetraquark si dovrebbe fornire la soluzione esatta in QCD non perturbativa. La complessità dei fenomeni che hanno atto alla scala delle interazioni forti rende impossibile questa procedura. Una strategia per ottenere lo spettro degli stati consiste nello scrivere un Hamiltoniana efficace che tiene conto delle possibili interazioni tra i quark legati a formare il tetraquark. Le masse degli stati si ricavano diagonalizzando L'Hamiltoniana sulla base degli stati $J^{PC} = 1^{--}$, numeri quantici della risonanza $Y(2175)$ in esame.

I valori delle masse dipendono dalla composizione in termini di quark del tetraquark, nonché dai numeri quantici di spin e momento angolare dei diquark. I risultati numerici ottenuti sono riportati a fine capitolo, in tab.(4.2.2).

4.1 L'Hamiltoniana efficace

In questa sessione viene proposta una Hamiltoniana efficace per la descrizione dei tetraquark dai numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$. Gli operatori di spin e momento angolare considerati sono pesati da coefficienti costanti chiamati costanti di accoppiamento. Gli accoppiamenti tra i quark che costituiscono il diquark si stimano applicando il modello a quark costituenti ai barioni ordinari. Per la stima delle costanti di accoppiamento tra un quark appartenente al diquark e un antiquark appartenente all'antidiquark si utilizzano le masse dei mesoni ordinari $q\bar{q}'$. Questo equivale ad assumere che non vi siano differenze negli accoppiamenti tra quark e diquark. A conclusione della discussione si definisce la base degli stati, con numeri quantici della risonanza $Y(2175)$, sui quali si diagonalizza l'Hamiltoniana efficace.

4.1.1 I termini di interazione

Il modello a quark costituenti riesce a spiegare la differenza di massa tra gli adroni con risultati molto vicini a quelli misurati sperimentalmente [25], [26]. Si può estendere il conto sviluppato nel precedente capitolo per i barioni ai mesoni e in particolare ai tetraquark. I quattro quark legati a formare un tetraquark sono identificati nel modo più generale da

$$[qq'][\bar{q}''\bar{q}''']$$

Per semplificare la trattazione si assume che diquark e antidiquark abbiano lo stesso contenuto in sapore e pertanto lo stato del tetraquark è costituito da

$$[q_1 q_2][\bar{q}_1 \bar{q}_2] \quad \text{con} \quad [q_2 q_2] = [qq], [sq], [ss]$$

Per via dell'alto valore di massa che si intende studiare tra i due oggetti è assunta una eccitazione angolare, con $L = 1$.

La forma più generale dell'Hamiltoniana a partire dalla quale è possibile stimare le masse

degli stati 1^{--} è data da

$$H = m_{\mathbf{q}} + m_{\bar{\mathbf{q}}} + H_{SS}^{qq} + H_{SS}^{q\bar{q}} + H_{SL} + H_{LL} \quad (4.1)$$

e i vari termini sono discussi di seguito. Con $m_{\mathbf{q}}$ si indica la massa del diquark e con $m_{\bar{\mathbf{q}}}$ quella dell'antidiquark, uguali nell'ipotesi di stesso contenuto in sapore. Con

$$H_{SS}^{qq} = 2\kappa_{\mathbf{q}}(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2}) \quad (4.2)$$

si indica l'interazione spin-spin tra due i quark interni al diquark e i due antiquark che costituiscono l'antidiquark. Il coefficiente $\kappa_{\mathbf{q}}$ pesa l'interazione ed è da stimare a partire dalle masse dei barioni noti.

L'interazione spin-spin tra un quark e un antiquark è espressa dalla somma sulle interazioni dei singoli quark

$$H_{SS}^{q\bar{q}} = 2\kappa_{q_1\bar{q}_2}(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2}) + 2\kappa_{q_1\bar{q}_1}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_1} + 2\kappa_{q_2\bar{q}_2}\vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} \quad (4.3)$$

ed è un' interazione tra i due diquark che formano l'adrone. I coefficienti sono distinti in quanto funzione delle masse della coppia quark-antiquark alla quale si riferiscono. Questi possono essere stimati a partire dalle masse dei mesoni vettoriali con $J = 1$. Il termine

$$H_{SL} = 2A_{\mathbf{q}}(\vec{S}_{\mathbf{q}} \cdot \vec{L} + \vec{S}_{\bar{\mathbf{q}}} \cdot \vec{L}) \quad (4.4)$$

è la somma dell'interazione tra lo spin totale del diquark e dell'antidiquark e il momento angolare orbitale del tetraquark. Il parametro $A_{\mathbf{q}}$ che pesa l'interazione viene stimato a partire dalle masse dei mesoni noti. L'ultimo termine in (4.1) è l'effetto del momento angolare non nullo proporzionale a $\vec{L}^2$, pertanto si può scrivere come

$$H_{LL} = B_{\mathbf{q}} \frac{L(L+1)}{2} \quad (4.5)$$

dove, di nuovo, la costante $B_{\mathbf{q}}$ è da stimare con riferimento agli stati eccitati dei mesoni.

$[q_1 q_2]$	$m_{q_1} (MeV)$	$\kappa_{q_1 \bar{q}_2}$	$\kappa_q = \kappa_{q_1 q_2}$	$m_{[q_1 q_2]} = m_{[\bar{q}_1 \bar{q}_2]} (MeV)$
$[qq]$	305/362	315	103	395
$[sq]$	490/546	198	64	590
$[ss]$	490/546	121	93	740

Tabella 4.1: Valori delle masse e delle costanti di accoppiamento spin-spin ricavate a partire dal modello a quark costituenti

4.1.2 Le costanti di accoppiamento

La stima delle costanti di accoppiamento si basa sul modello a quark costituenti, attraverso il quale si ottengono anche le stime delle masse dei quark costituenti che verranno utilizzate in quanto segue per riscalare i coefficienti sui quali non sono sufficienti le informazioni sperimentali accessibili. I coefficienti κ pesano la differenza in massa tra gli stati scalari ($J = 0$) e quelli vettoriali ($J = 1$). Quindi facendo riferimento a

$$H = \sum_i m_{q_i} + 2\kappa_{q_1 \bar{q}_2} (\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2}) = \sum_i m_{q_i} + \kappa_{q_1 \bar{q}_2} (\vec{J}^2 - \vec{S}_{q_1}^2 - \vec{S}_{\bar{q}_2}^2) \quad (4.6)$$

nel caso dei mesoni ($\pi - \rho$) si ha

$$\begin{aligned} M(\pi) &= 2m_q - \frac{3}{2}\kappa_{q\bar{q}} \\ M(\rho) &= 2m_q + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{q}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove col generico q si fa riferimento ai quark leggeri u, d . Applicando lo stesso procedimento ai mesoni dotati di stranezza si ottiene

$$\begin{aligned} M(K) &= m_q + m_s - \frac{3}{2}\kappa_{q\bar{s}} \\ M(K^*) &= m_q + m_s + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{s}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e i valori delle masse dei quark costituenti e delle costanti di accoppiamento sono riportate in tab.(4.1). Avendo a disposizione le masse dei quark costituenti si può procedere al calcolo delle costanti di accoppiamento tra quark. A tal fine si considerano i barioni

dell'ottetto a $J = 1/2$ e del decupletto a $J = 3/2$, sotto l'ipotesi che due quark siano legati a formare un diquark. Nel caso della Λ si ha il diquark 'good' a spin $S_q = 0$ costituito dai quark u, d . Utilizzando la relazione

$$\vec{J}^2 = (\vec{S}_q + \vec{S}_q + \vec{S}_s)^2 = \vec{S}_q^2 + \frac{3}{4} + 2(\vec{S}_q \cdot \vec{S}_s + \vec{S}_s \cdot \vec{S}_q) \quad (4.9)$$

si riscrive l'Hamiltoniana dalla massa degli adroni come

$$\begin{aligned} M = 2m_q + m_s &+ \kappa_{qq} \left[S_q(S_q + 1) - \frac{3}{2} \right] \\ &+ \kappa_{sq} \left[J(J + 1) - S_q(S_q + 1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Seguendo il procedimento descritto per i mesoni, si possono impostare una serie di relazioni per i barioni ($p - \Delta$)

$$\begin{aligned} M(p) &= 3m_q - \frac{3}{2}\kappa_{qq} \\ M(\Delta) &= 3m_q + \frac{3}{2}\kappa_{qq} \end{aligned} \quad (4.11)$$

e i barioni con stranezza ($\Lambda - \Sigma - \Sigma^*$)

$$\begin{aligned} M(\Lambda) &= 2m_q + m_s - \frac{3}{2}\kappa_{qq} \\ M(\Sigma) &= 2m_q + m_s + \frac{1}{2}\kappa_{qq} - 2\kappa_{sq} \\ M(\Sigma^*) &= 2m_q + m_s - \kappa_{sq} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Risulta che prendendo come dati iniziali le masse dei barioni è nuovamente possibile determinare le masse dei quark costituenti: i risultati che si ottengono sotto questa ipotesi sono confrontabili con quelli ottenuti a partire dai mesoni e sono riportate come seconda entrata nella tab.(4.1), insieme alle costanti d'accoppiamento degli spin.

Noti i coefficienti κ_q e $\kappa_{q\bar{q}}$ si riesce a ricavare la massa dei diquark $[qq]$ e $[sq]$. Si applica il modello a quark costituenti agli stati scalari leggeri descritti come tetraquark. Nel caso

dell' $a_0(980) = [sq]_{S=0}[\bar{s}\bar{q}]_{S=0}$ si lascia incognita la massa del diquark e si scrive

$$\begin{aligned}
 H = 2m_{[sq]} &+ 2\kappa_{sq}[(\vec{S}_s \cdot \vec{S}_q) + (\vec{S}_{\bar{s}} \cdot \vec{S}_{\bar{q}})] \\
 &+ 2\kappa_{q\bar{q}}(\vec{S}_q \cdot \vec{S}_{\bar{q}}) \\
 &+ 2\kappa_{s\bar{q}}[(\vec{S}_s \cdot \vec{S}_{\bar{q}}) + (\vec{S}_{\bar{s}} \cdot \vec{S}_q)] \\
 &+ 2\kappa_{s\bar{s}}(\vec{S}_s \cdot \vec{S}_{\bar{s}})
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Le interazioni tra un quark e un antiquark risultano nulle in quanto entrambi i diquark sono di tipo scalare a $S = 0$; una giustificazione rigorosa basata sull'azione degli operatori sullo stato segue nel testo. Da quanto detto risulta possibile ricavare la massa del diquark dotato di stranezza

$$\langle a_0 | H | a_0 \rangle = M(a_0) = 2m_{[sq]} - 3\kappa_{sq} \tag{4.14}$$

Il valore della massa del diquark costituito da quark leggeri si ottiene applicando lo stesso ragionamento allo stato $\sigma = [qq']_{S=0}[\bar{q}\bar{q}']_{S=0}$ e i risultati numerici sono riportati in tab.(4.1).

Per la stima delle stesse quantità riguardanti diquark contenenti due quark s non si hanno dati sperimentali da prendere come ipotesi. Da quanto visto nel capitolo precedente i coefficienti che pesano l'interazione tra gli spin sono inversamente proporzionali alle masse dei quark interagenti. Per tal motivo è lecito riscalare $\kappa_{s\bar{q}} \propto \frac{1}{m_s m_q}$ per un fattore $\frac{m_q}{m_s}$, dove le masse sono quelle dei quark costituenti, in modo da ottenere $\kappa_{s\bar{s}} \propto \frac{m_s}{m_s}$. La massa del diquark $[ss]$ si ottiene a partire dal valore $m_{[sq]}$ aggiungendovi la differenza di masse tra un quark leggero q e il quark strano s . Anche questi risultati sono inseriti nella tab.(4.1). Un'ultima analisi mostra come stimare i coefficienti A_q e B_q . Si ricorre ai mesoni con eccitazione orbitale tra i quark non nulla. Dal comportamento sotto coniugazione di carica C e parità P è possibile attribuire i valori di L ed S ad un mesone. Vengono considerati i mesoni ρ , a_1 , a_2 composti da quark leggeri, coi numeri quantici riportati in tab.(4.2). La parità di un sistema particella-antiparticella è data dal valore $(-1)^{L+1}$ per via della parità

<i>mesone</i>	J^{PC}	massa(MeV)	S	L
ρ	1^{--}	775	1	0
a_1	1^{++}	1230	1	1
a_2	2^{++}	1318	1	1

Tabella 4.2: mesoni eccitati orbitalmente utilizzati per la determinazione dei parametri A_q e B_q

intrinseca negativa. Quindi per un mesone a parità positiva è richiesto un valore dispari di L . Il valore di S è fissato considerando che lo stesso sistema sotto l'azione dell'operatore di coniugazione di carica acquisisce un fattore $(-1)^{L+S}$. Il termine (4.4) si riscrive come

$$2\vec{S} \cdot \vec{L} = J(J+1) - S(S+1) - L(L+1) \rightarrow \begin{cases} J=1, S=1, L=1 & 2S \cdot L = -2 \\ J=2, S=1, L=1 & 2S \cdot L = +2 \end{cases}$$

e il sistema che ne deriva è

$$\begin{aligned} M(\rho) &= 2m_q + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{q}} \\ M(a_1) &= 2m_q + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{q}} - 2A + B \\ M(a_2) &= 2m_q + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{q}} + 2A + B \end{aligned} \quad (4.15)$$

I mesoni in esame hanno la stessa composizione in termini di quark e lo stesso valore di spin, perciò si indica con una generica costante la somma $2m_q + \frac{1}{2}\kappa_{q\bar{q}}$ e si ottengono i valori $A = 22$, $B = 505$.

4.1.3 La base

Per ottenere la massa di uno stato è necessario diagonalizzare l'Hamiltoniana su quello stato. Lo stato di un tetraquark è specificato dai numeri quantici di spin del diquark S_q e dell'antidiquark $S_{\bar{q}}$, lo spin relativo tra i due $S_{q\bar{q}}$ e il valore di L e J totale. La notazione per uno stato generico $[qq'][\bar{q}''\bar{q}''']$ è la seguente

$$|S_q, S_{\bar{q}}; S_{q\bar{q}}, L_{q\bar{q}}, J\rangle = |q^T \Gamma q', \bar{q}^{T''} \Gamma' \bar{q}'''; S_{q\bar{q}}, L_{q\bar{q}}, J\rangle \quad (4.16)$$

dove la matrice Γ indica lo spin del diquark, Γ' dell'antidiquark. Dove possibile verranno omessi i numeri quantici fissati, per non appesantire la notazione. Le matrici Γ sono normalizzate in modo da avere

$$\text{Tr}(\Gamma^{\alpha\dagger}\Gamma^\beta) = \delta^{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

inoltre si ha

$$\Gamma^0 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}; \quad \Gamma^i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\sigma_i \quad (4.18)$$

rispettivamente per spin 0 e 1 [27]. Per giustificare la relazione (4.18), si calcola l'azione delle matrici di Pauli sugli stati scritti esplicitando lo spin. Applicando la matrice σ_2 tra due doppietti di spin dei quark che costituiscono il diquark $[q_1q_2]$

$$(q_{1\uparrow}q_{1\downarrow}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{2\uparrow} \\ q_{2\downarrow} \end{pmatrix} \sim (q_{1\uparrow}q_{1\downarrow}) \begin{pmatrix} -q_{2\downarrow} \\ q_{2\uparrow} \end{pmatrix} = q_{1\downarrow}q_{2\uparrow} - q_{1\uparrow}q_{2\downarrow}$$

si ottiene la corretta composizione di spin che descrive uno stato antisimmetrico in spin, ossia $S = 0$. Analogamente la componente $S_z = 0$ dello spin $S = 1$ si ottiene applicando

$$(q_{1\uparrow}q_{1\downarrow}) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{2\uparrow} \\ q_{2\downarrow} \end{pmatrix} \sim (q_{1\uparrow}q_{1\downarrow}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{2\uparrow} \\ q_{2\downarrow} \end{pmatrix} = q_{1\uparrow}q_{2\downarrow} + q_{1\downarrow}q_{2\uparrow}$$

Per calcolare il contributo dei termini di spin dell'Hamiltoniana efficace è conveniente esprimere gli stati tramite il prodotto diretto degli operatori di spin stessi.

$$\begin{aligned} |0_{\mathbf{q}}, 0_{\bar{\mathbf{q}}}; J\rangle &= \frac{1}{2} |q_1^T \sigma_2 q_2, \bar{q}_1^T \sigma_2 \bar{q}_2; 1\rangle := \frac{1}{2} \sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ |1_{\mathbf{q}}, 0_{\bar{\mathbf{q}}}; J\rangle &= \frac{1}{2} |q_1^T \sigma_2 \sigma_i q_2, \bar{q}_1^T \sigma_2 \bar{q}_2; 1\rangle := \frac{1}{2} \sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_2 \\ |0_{\mathbf{q}}, 1_{\bar{\mathbf{q}}}; J\rangle &= \frac{1}{2} |q_1^T \sigma_2 q_2, \bar{q}_1^T \sigma_2 \sigma_i \bar{q}_2; 1\rangle := \frac{1}{2} \sigma_2 \otimes \sigma_2 \sigma_i \\ |1_{\mathbf{q}}, 1_{\bar{\mathbf{q}}}; J\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon^{ijk} |q_1^T \sigma_2 \sigma_j q_2, \bar{q}_1^T \sigma_2 \sigma_k \bar{q}_2; 1\rangle := \frac{1}{2\sqrt{2}} \epsilon^{ijk} \sigma_2 \sigma_j \otimes \sigma_2 \sigma_k \end{aligned} \quad (4.19)$$

dove il simbolo di prodotto tensoriale sottolinea la separazione tra lo spazio di spin del diquark e lo spazio dello spin dell'antidiquark.

Per la stima delle masse degli stati 1^{--} è necessario introdurre la base degli stati a $J = 1$

e studiarne il comportamento sotto gli operatori di parità e coniugazione di carica. Lo stato a $J = 1$ più semplice da scrivere è costituito da due diquark a spin nullo, dotati di un'unità di eccitazione angolare relativa $L = 1$

$$|S_q, S_{\bar{q}}; J\rangle = |0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle \quad (4.20)$$

Il valore $L = 1$ garantisce le giuste proprietà di simmetria sotto l'operatore di parità, infatti essendo diquark e antidiquark dotati della stessa parità intrinseca, assumendo $L = 1$, risulta

$$P|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = (-1)^L|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = -|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle \quad (4.21)$$

Per avere lo stesso autovalore sotto l'operazione di coniugazione di carica è sufficiente l'unico possibile valore di spin totale $S = 0$ così da avere

$$C|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = (-1)^{L+S}|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = -|0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle \quad (4.22)$$

Per lo stato formato da due diquark vettoriali

$$|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{ijk}\sigma_2\sigma_j \otimes \sigma_2\sigma_k, \quad (4.23)$$

vale lo stesso ragionamento sulle proprietà di simmetria: la parità fissa il valore $L = 1$ e la richiesta di autovalore -1 per l'operatore di coniugazione di carica elimina i valori dispari di spin totale. In questo caso la composizione degli spin permette anche lo stato con $S = 2$. Un'ultimo possibile stato $J^{PC} = 1^{--}$ è dato dalla somma

$$\frac{|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle + |0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4.24)$$

Il comportamento sotto parità è indipendente dal valore dello spin, pertanto anche per questo stato si assume $L = 1$. L'operatore di coniugazione di carica C scambia il diquark con l'antidiquark

$$C|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = |1_{\bar{q}}, 0_q; 1_J\rangle \quad (4.25)$$

e per tal motivo la somma dei due contributi è il corretto autostato dell'operatore C . Riassumendo, la base degli stati 1^{--} , avendo fissato $J = L = 1$, è data da

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |0_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = \frac{1}{2}\sigma_2 \otimes \sigma_2 \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle + |0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sigma_2\sigma_i \otimes \sigma_2 + \sigma_2 \otimes \sigma_2\sigma_i\right) \\ |3\rangle &= |1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{ijk}\sigma_2\sigma_j \otimes \sigma_2\sigma_k \end{aligned} \quad (4.26)$$

L'ultima relazione necessita del tensore ϵ^{ijk} antisimmetrico nei tre indici ijk in modo da avere i tre possibili stati nello spin, con spin totale unitario.

4.2 Diagonalizzazione

Avendo specificato l'Hamiltoniana (4.1) e la base degli stati 1^{--} (4.26), è ora possibile mostrare come agiscono gli operatori di spin sugli stati e quindi ottenere lo spettro di massa.

4.2.1 Azione degli operatori sugli stati

Gli operatori di spin presenti nell'hamiltoniana sono i seguenti :

- tra i quark all'interno del diquark $\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2}$ e tra gli antiquark legati nell'antidiquark $\vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2}$
- tra un quark e un antiquark $\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2}, \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2}, \vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_1}, \vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2}$.

dove con q_1, q_2 si indicano i quark che compongono il tetraquark $[q_1 q_2][\bar{q}_1 \bar{q}_2]$. L'azione sullo stato è data da

$$(\vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2})|q_1^T \Gamma q_2, \bar{q}_1^T \Gamma' \bar{q}_2; J\rangle = \frac{1}{4} \sum_j |q_1^T \Gamma \sigma_j q_2, \bar{q}_1^T \sigma_j^T \Gamma' \bar{q}_2; J\rangle \quad (4.27)$$

in quanto l'operatore di spin è proporzionale alle matrici di Pauli

$$S_j = \frac{\sigma_j}{2} \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.28)$$

A questo punto si hanno a disposizione gli ingredienti necessari per diagonalizzare la parte di spin dell'Hamiltoniana. Con riferimento allo stato $[q_1 q_2][\bar{q}_1 \bar{q}_2]$ si ha

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} |0_{\mathbf{q}}, 0_{\bar{\mathbf{q}}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sigma_l^T \sigma_2 \sigma_l \otimes \sigma_2 \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sigma_2 \sigma_l \sigma_l \otimes \sigma_2 \right) = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \sigma_2 \otimes \sigma_2 \right) \\ &= -\frac{3}{4} |0_{\mathbf{q}}, 0_{\bar{\mathbf{q}}}; 1_J\rangle\end{aligned}\quad (4.29)$$

dove è stata usata la relazione

$$\sigma_{lT} \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_l \quad (4.30)$$

Altre relazioni utili per quanto segue sono qui elencate. Per le matrici di Pauli si ha

$$\begin{aligned}[\sigma_i, \sigma_j] &= \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \\ \sigma_i \sigma_j &= \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k\end{aligned}\quad (4.31)$$

Per le contrazioni degli indici dei tensori completamente antisimmetrici risulta

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} \epsilon^{srk} &= \delta_i^s \delta_j^r - \delta_i^r \delta_j^s \\ \epsilon_{ijk} \epsilon^{sjk} &= 2\delta_i^s\end{aligned}\quad (4.32)$$

Il contributo derivante dall'interazione che interessa anche il momento angolare sarà da calcolare in seguito.

Per un operatore che agisce tra il diquark e l'antidiquark si ottiene

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |0_{\mathbf{q}}, 0_{\bar{\mathbf{q}}}; J\rangle &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sigma_l^T \sigma_2 \otimes \sigma_2 \sigma_l \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sigma_2 \sigma_l \otimes \sigma_2 \sigma_l \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4} |1_{\mathbf{q}}, 1_{\bar{\mathbf{q}}}; 0\rangle\end{aligned}\quad (4.33)$$

Lo stato risultante è la componente simmetrica dello spin, ovvero quella risultante dalla composizione di due diquark a spin unitario in modo da avere spin totale nullo.

Per discutere l'azione degli operatori di spin sullo stato $|2\rangle$ della (4.26) è utile separare le due componenti: $|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle$ e $|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle$. Sono riportati i contributi significativi, i rimanenti sono del tutto analoghi o si possono ricavare per simmetria. L'interazione tra due quark si stima come

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{8} (\sigma_l^T \sigma_2 \sigma_i \sigma_l \otimes \sigma_2) \\
&= -\frac{1}{8} (\sigma_2 \sigma_l \sigma_i \sigma_l \otimes \sigma_2) \\
&= \frac{1}{8} (-2\delta_{li} \sigma_2 \sigma_l \otimes \sigma_2 + 3\sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_2) \\
&= \frac{1}{4} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Per l'interazione tra due antiquark si ha

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{8} (\sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_l^T \sigma_2 \sigma_l) \\
&= -\frac{1}{8} (\sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_2 \sigma_l \sigma_l) \\
&= -\frac{1}{8} (3\sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_2) \\
&= -\frac{3}{4} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Per le interazioni tra un quark e un antiquark si ricorre alla terza relazione di (4.31) e risulta

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{8} (\sigma_l^T \sigma_2 \sigma_i \otimes \sigma_2 \sigma_l) \\
&= -\frac{1}{8} (\sigma_2 \sigma_l \sigma_i \otimes \sigma_2 \sigma_l) \\
&= -\frac{1}{8} (\sigma_2 \otimes \sigma_2 \sigma_i + i\epsilon^{lik} \sigma_2 \sigma_k \otimes \sigma_2 \sigma_l) \\
&= -\frac{1}{4} (|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

La proiezione sullo stato $|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle$ viene cancellata dal contributo dell'operatore $\vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2}$ pesato con lo stesso coefficiente $\kappa_{q_1 \bar{q}_2}$ nell'Hamiltoniana generale.

$$\vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle = -\frac{1}{4} (|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle) \tag{4.37}$$

Analogamente si possono provare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_1} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{4}(|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle) \\ \vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{4}(|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle)\end{aligned}\quad (4.38)$$

Anche in questo caso la proiezione sullo stato $|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle$ viene cancellata, ma in maniera differente. Infatti alle (4.38) vanno aggiunti i contributi degli operatori sullo stato $|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_1} |0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{4}(|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle) \\ \vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{4}(|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle)\end{aligned}\quad (4.39)$$

e va sottolineato che in generale $\kappa_{q_1\bar{q}_1} \neq \kappa_{q_2\bar{q}_2}$. Il calcolo sullo stato $|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle$ è più impegnativo e i passi fondamentali sono riportati di seguito

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} |1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{8}(\epsilon^{ijk} \sigma_l^T \sigma_2 \sigma_j \sigma_l \otimes \sigma_2 \sigma_k) \\ &= -\frac{1}{8}(\epsilon^{ijk} \sigma_2 \sigma_l \sigma_j \sigma_l \otimes \sigma_2 \sigma_k) \\ &= -\frac{1}{8}(2\epsilon^{ijk} \delta^{jl} \sigma_2 \sigma_l \otimes \sigma_2 \sigma_k - 3\epsilon^{ijk} \sigma_2 \sigma_j \otimes \sigma_2 \sigma_k) \\ &= \frac{1}{4}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle\end{aligned}\quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} |1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle &= \frac{1}{8}(\epsilon^{ijk} \sigma_l^T \sigma_2 \sigma_j \otimes \sigma_2 \sigma_k \sigma_l) \\ &= -\frac{1}{8}(\epsilon^{ijk} \sigma_2 \sigma_l \sigma_j \otimes \sigma_2 \sigma_k \sigma_l) \\ &= -\frac{1}{8}\epsilon^{ijk}(\delta_{lj} \sigma_2 \otimes i\epsilon^{klr} \sigma_2 \sigma_r \\ &\quad + i\epsilon^{ljs} \sigma_2 \sigma_s \otimes \delta^{kl} \sigma_2 \\ &\quad + i\epsilon^{ljs} \sigma_2 \sigma_s \otimes i\epsilon^{klr} \sigma_2 \sigma_r) \\ &= \frac{i}{2}|0_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle + \frac{i}{2}|1_q, 0_{\bar{q}}; 1_J\rangle - \frac{1}{4}|1_q, 1_{\bar{q}}; 1_J\rangle\end{aligned}\quad (4.41)$$

In conclusione l'azione degli operatori di spin sulla base degli stati 1^{--} , con proiezione non nulla sulla stessa base, può essere riassunta nelle seguenti equazioni.

$$\begin{aligned}
(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|1\rangle &= -\frac{3}{2}|1\rangle \\
(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|2\rangle &= -\frac{1}{2}|2\rangle & (\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_1})|2\rangle &= +\frac{1}{4}|2\rangle \\
(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2})|2\rangle &= -\frac{1}{2}|2\rangle & (\vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|2\rangle &= +\frac{1}{4}|2\rangle \\
(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{q_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|3\rangle &= +\frac{1}{2}|3\rangle & (\vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|3\rangle &= -\frac{1}{4}|3\rangle \\
(\vec{S}_{q_1} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2} + \vec{S}_{\bar{q}_1} \cdot \vec{S}_{q_2})|3\rangle &= -\frac{1}{2}|3\rangle & (\vec{S}_{q_2} \cdot \vec{S}_{\bar{q}_2})|3\rangle &= -\frac{1}{4}|3\rangle
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Pertanto proiettando sugli stati $\langle 1|$, $\langle 2|$, $\langle 3|$ si ottiene la matrice dell'interazione di spin.

$$\Delta m_{SS} = \begin{bmatrix} -3\kappa_q & 0 & 0 \\ 0 & -\kappa_q - \kappa_{q_1\bar{q}_2} + (\kappa_{q_1\bar{q}_1} + \kappa_{q_2\bar{q}_2})/2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_q - \kappa_{q_1\bar{q}_2} - (\kappa_{q_1\bar{q}_1} + \kappa_{q_2\bar{q}_2})/2 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Per ottenere la stima delle masse degli stati 1^{--} è necessario calcolare l'azione degli operatori di momento angolare, ovvero i termini in (4.4,4.5), considerando i valori possibili valori di S per ogni stato.

4.2.2 Risultati numerici

Il sistema che ne deriva, considerando tutti i termini dell'Hamiltoniana, è il seguente

$$\begin{aligned}
m_Y^{(1)}(S_{q_1} = 0, S_{q_2} = 0, S_{q\bar{q}} = 0, L_{q\bar{q}} = 1) &= 2m_q + \lambda_1 + B_q \\
m_Y^{(2)}(S_{q_1} = 1, S_{q_2} = 0, S_{q\bar{q}} = 1, L_{q\bar{q}} = 1) &= 2m_q + \delta + \lambda_2 - 2A_q + B_q \\
m_Y^{(3)}(S_{q_1} = 1, S_{q_2} = 1, S_{q\bar{q}} = 0, L_{q\bar{q}} = 1) &= 2m_q + 2\delta + \lambda_3 - 2A_q + B_q \\
m_Y^{(4)}(S_{q_1} = 1, S_{q_2} = 1, S_{q\bar{q}} = 2, L_{q\bar{q}} = 1) &= 2m_q + 2\delta + \lambda_3 - 6A_q + B_q
\end{aligned} \tag{4.44}$$

dove le ultime due equazioni si riferiscono ai due diversi valori possibili per lo stato $|3\rangle$.

Con λ_i si indica l'autovalore della matrice di spin, diagonalizzato sullo stato $|i\rangle$, con δ la

	$m_Y^{(1)}$	$m_Y^{(2)}$	$m_Y^{(3)}$	$m_Y^{(4)}$
$[qq']$	986	1432/1342	1293/1923	1203/1833
$[sq]$	1493	1749/1726	1591/2004	1501/1914
$[ss]$	—	—	2090/2333	2000/2243

Tabella 4.3: valori delle masse degli stati 1^{--} per le diverse assunzioni di composizione in termini di quark e numeri quantici degli stati.

differenza di massa tra il diquark a spin 0 e il diquark a spin 1. In base a quanto discusso nel capitolo precedente, la differenza di massa tra i diquark scalare e vettoriale è funzione inversa del prodotto delle masse dei quark, pertanto si hanno valori differenti nel caso $[qq']$ e $[sq]$. Si assume $\delta \sim 285$ per $[qq']$ e $\delta \sim 150$ per $[sq']$: i valori sono mediati su determinazioni differenti da quella mostrata nel capitolo precedente, ma risultano confrontabili. Un diquark formato da due quark s , $[ss]$ è necessariamente simmetrico nello spin, il che equivale a dire $S_q = S_{\bar{q}} = 1$. Pertanto sono permesse soltanto le ultime due equazioni di (4.44), che, considerando l'autovalore $\langle 3|H|3 \rangle$ in (4.43) si riscrivono come

$$m_Y^{(3)}(S_{q_1} = 1, S_{q_2} = 1, S_{q\bar{q}} = 0, L_{q\bar{q}} = 1) = 2m_q + 2\delta + (\kappa_s - 2\kappa_{s\bar{s}}) - 2A_q + B_q$$

$$m_Y^{(4)}(S_{q_1} = 1, S_{q_2} = 1, S_{q\bar{q}} = 2, L_{q\bar{q}} = 1) = 2m_q + 2\delta + (\kappa_s - 2\kappa_{s\bar{s}}) - 6A_q + B_q$$

Tutti i valori delle costanti sono riportate in tab.(4.1) e i valori numerici che si ottengono per le masse degli stati 1^{--} sono mostrati in tab.(4.2.2). Il primo valore si riferisce al calcolo completo, ampiamente discusso in questo capitolo, il secondo valore si ottiene ponendo nulle le interazioni di spin tra i due diquark. La giustificazione di questa possibilità segue dalla necessità di avere $L = 1$ per descrivere un valore di massa superiore al GeV. La barriera di potenziale che ne deriva può annullare l'interazione spin-spin o abbassare i valori dei coefficienti stimati a partire dal modello a quark costituenti senza tenere in conto i possibili termini di eccitazione orbitale. In tab.(4.2.2) sono tenute in considerazione le diverse composizioni in termini di quark ($[qq']$, $[sq]$ e $[ss]$) e risulta che i valori delle masse meglio compatibili con la risonanza $Y(2175)$ sono dati dagli stati $[sq]_{S=1}$ oppure

$[ss]_{S=1}$ con spin totale nullo in entrambi i casi. La discriminazione tra le due possibili composizioni è basata sull'analisi sperimentale dei possibili decadimenti della $Y(2175)$ ed è argomento centrale del cap.7.

Capitolo 5

L'*ISR* e il rivelatore *BaBar*

Nella trattazione fin qui svolta si sono discusse le caratteristiche dei possibili stati eccitati dei tetraquark limitandosi al caso $J^{PC} = 1^{--}$ in quanto questi sono i numeri quantici del candidato più probabile osservato sperimentalmente, la risonanza $Y(2175)$. In questo capitolo viene inizialmente spiegato quale processo permette di identificare gli stati con $J^{PC} = 1^{--}$ in collisioni e^+e^- . Viene quindi discusso il fenomeno della radiazione di stato iniziale (*ISR*), ovvero l'emissione di un fotone reale dal fascio di elettroni o positroni. La risonanza $Y(2175)$ viene osservata per la prima volta in un processo di *ISR*, grazie al rivelatore *BaBar* presso il collisore *PEP-II*. Il collisore *KEKB* non effettua lo stesso tipo di misura e pertanto non ci sono dati provenienti dal rivelatore *Belle*. La conferma della risonanza viene fornita dal rivelatore *BESII*, in processi di decadimento che non utilizzano radiazione di stato iniziale. Nel corso del capitolo è descritta la macchina acceleratrice *PEP-II* e l'esperimento *BaBar*, di cui si sono rianalizzati i dati sperimentali. Il capitolo si chiude spiegando come avviene l'identificazione sperimentale dei fotoni *ISR* e delle particelle necessarie alla ricostruzione degli stati finali analizzati nel cap.(7).

5.1 La radiazione di stato iniziale

Con l'espressione radiazione di stato iniziale si intende l'emissione di un fotone ad alta energia da uno dei due fasci di particelle che circolano nel collisore. Il processo si può scrivere come

$$e^+e^- \rightarrow \gamma V \rightarrow \gamma_{ISR} f \quad (5.1)$$

dove con V si indica la risonanza vettoriale intermedia e con f si indicano gli adroni che costituiscono lo stato finale. Il fotone γ_{ISR} , reale, può essere emesso sia dal fascio di elettroni che dal fascio di positroni e i due contributi sono mostrati in fig.(5.1). In

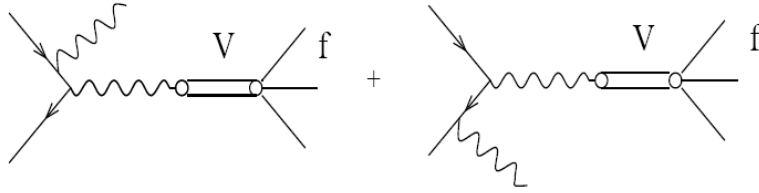


Figura 5.1: Contributi dominanti all'emissione di stato iniziale

seguito a questa emissione l'energia del centro di massa diminuisce, di conseguenza la massa invariante dello stato finale varia a seconda dell'energia portata via dal fotone. Se si indicano con $(E_1, \vec{p}_1)$ l'energia e il tri-impulso di uno dei due fasci collidenti e con $(E_2, \vec{p}_2)$ le stesse quantità relative all'altro, si ottiene la massa invariante M^2 dello stato finale f attraverso la semplice considerazione cinematica svolta nel centro di massa:

$$\begin{aligned} M^2 &= (E_1 + E_2)^2 - |\vec{p}_1 + \vec{p}_2|^2 \\ M^2 &= (E_1 - E_{\gamma_{ISR}} + E_2)^2 - |\vec{p}_1 - \vec{p}_{\gamma_{ISR}} + \vec{p}_2|^2 = s - 2E_{\gamma_{ISR}}\sqrt{s} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dove viene usata la relazione per gli impulsi nel centro di massa ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$) e delle energie ($\sqrt{s} = E_1 + E_2$).

E' importante sottolineare che il fotone γ_{ISR} è un fotone reale, di massa nulla, che deve

essere identificato sperimentalmente tra gli stati finali prodotti nella reazione. Nel processo *ISR* si forma anche un fotone virtuale γ^* , come indicato in fig.(5.1), che assicura per la risonanza mesonica intermedia V gli stessi numeri quantici del fotone $J^{PC} = 1^{--}$. Dal decadimento di questa risonanza si generano gli stati finali che sono gli unici accessibili sperimentalmente attraverso le informazioni che si ricavano dalle varie componenti del rivelatore. Gli stati intermedi, infatti, vengono investigati per mezzo delle distribuzioni in massa invariante degli stati finali come verrà discusso in par.(6.2)

La sezione d'urto della reazione che porta agli stati finali f con l'emissione del fotone γ_{ISR} è proporzionale alla sezione d'urto del processo di produzione degli stessi adroni nello stato f , utilizzando l'intera energia a disposizione dei due fasci collidenti. In formule si ha

$$\frac{d\sigma_{f\gamma_{ISR}}(s, x)}{dx} = W(s, x) \cdot \sigma_f(s(1 - x)) \quad (5.3)$$

dove $x = 2E_{\gamma_{ISR}}/\sqrt{s}$, con $E_{\gamma_{ISR}}$ si identifica l'energia del fotone irradiato, con $\sqrt{s}$ si indica l'energia nel centro di massa di e^+e^- (prima dell'emissione del fotone γ_{ISR}), e con $\sqrt{s(1-x)}$ l'energia a disposizione per la produzione dello stato finale f . La funzione $W(s, x)$ è detta radiatore e descrive la densità di probabilità che un fotone venga emesso. La sua determinazione è accurata all'1% come mostrato in ref.[28].

La radiazione di stato iniziale è una tecnica utilizzata dalle macchine acceleratrici quali *PEP-II* e *KEKB*, entrambe operanti alla risonanza $\Upsilon(4S)$, nonché da *DAΦNE* operante alla risonanza ϕ . L'energia che può raggiungere *PEP-II* (o equivalentemente *KEKB*) è circa 10.6 GeV. Se viene studiato un processo in *ISR*, si dispone di un intervallo di energia inferiore per via di fondi che disturbano il segnale a partire da 4-5 GeV. Sebbene non sia possibile sfruttare appieno le potenzialità della macchina per lo studio di processi *ISR*, ci sono dei punti fondamentali che ne giustificano il successo e lo sviluppo. Ad esempio, grandezze come luminosità, energie dei due fasci vengono misurate una sola volta durante lo studio di stati finali adronici in un certo intervallo di energia del centro di

massa: questo riduce notevolmente gli errori sistematici che deriverebbero dalla necessità di combinare dati diversi nei tradizionali *scan* in energia.

Per capire come avviene l'identificazione del fotone γ_{ISR} prodotto da uno dei due fasci di particelle iniziali è utile mostrare brevemente le caratteristiche di un collisore e^+e^- quale *PEP-II* e del rivelatore *BaBar* che per primo ha mostrato evidenza della risonanza $Y(2175)$.

5.2 PEP-II

L'esperimento *BaBar* alla *B-Factory PEP-II* è stato costruito per lo studio dei mesoni B , prodotti in coppie $B\bar{B}$, nel decadimento del mesone $\Upsilon(4S)$. *PEP-II* è costituito da due anelli di accumulazione nello stesso tunnel, uno ad alta energia (HER, High Energy Ring) per il fascio di elettroni da 9.0 GeV, e uno a bassa energia (LER, Low Energy Ring) per il fascio di positroni da 3.1 GeV. Essendo le energie dei fasci di positroni e di elettroni diverse tra loro nel sistema di riferimento del laboratorio, le particelle prodotte sono distribuite in modo asimmetrico rispetto all'asse dei fasci. Per massimizzare l'angolo solido di rivelazione delle particelle prodotte il centro del rivelatore è spostato in avanti rispetto al punto d'interazione.

Il sistema di riferimento convenzionalmente adoperato in *BaBar* ha l'asse z coincidente con la direzione di moto degli elettroni, l'asse y è rivolto verso l'alto e l'asse x è orientato in direzione opposta a quella del centro dell'anello di accumulazione. Si utilizza inoltre il sistema di riferimento delle coordinate cilindriche (z, θ, ϕ) , con asse coincidente con la direzione dei fasci.

5.3 Il sistema di tracciamento

La traccia delle particelle cariche è ricostruita tramite il rivelatore di vertice, il rivelatore più interno di *BaBar* utilizzato per la misura di precisione in prossimità del punto

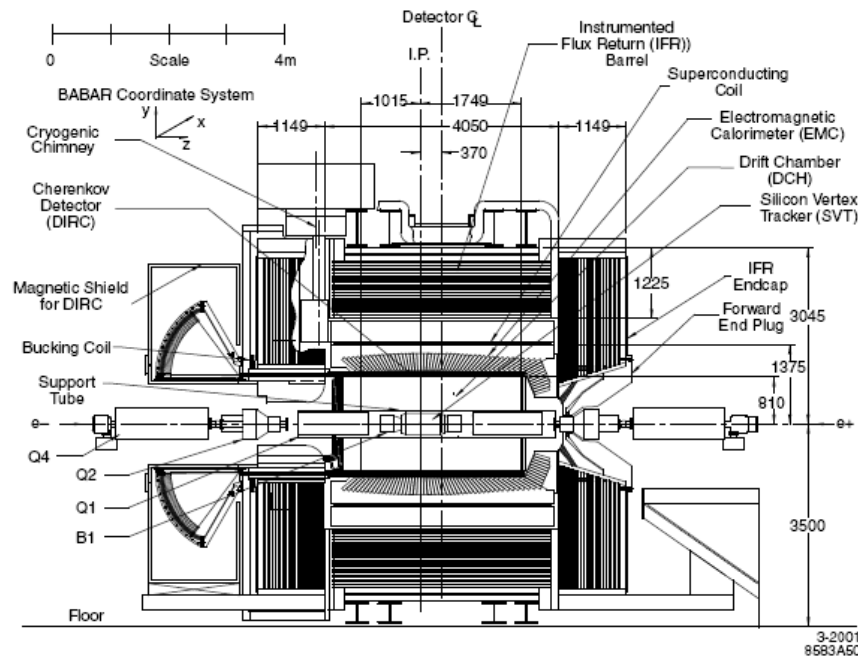


Figura 5.2: Sezione longitudinale del rivelatore *BaBar*.

di interazione, e la camera a deriva, che misura principalmente l'impulso delle particelle cariche. L'intero sistema di tracciamento è immerso nel campo magnetico di intensità pari a 1.5 T che curva le traiettorie con raggio di curvatura proporzionale all'impulso trasverso della particella carica.

5.3.1 Il rivelatore di vertice

Il ruolo principale del rivelatore di vertice è quello di misurare con grande precisione la posizione delle tracce in prossimità del punto di interazione. Per questo tipo di misure vengono utilizzati dispositivi a semiconduttori (silicio), perchè questi permettono di raggiungere ottime risoluzioni sia in energia che in posizione, con ottimo tempo di risposta. In *BaBar* il Silicon Vertex Tracker (*SVT*) è il sottosistema più interno, costituito da 52 sensori di silicio a doppia faccia, organizzati in 5 strati a simmetria cilindrica, come

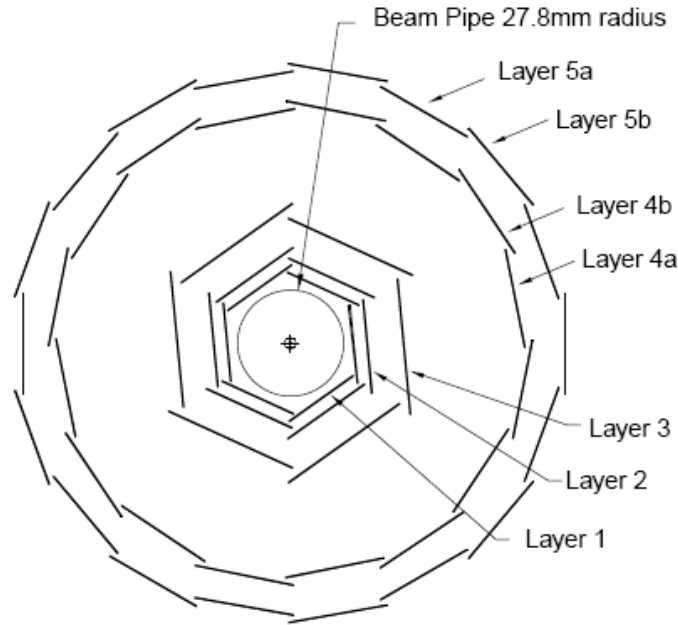


Figura 5.3: Sezione trasversa SVT.

mostrato in fig.(5.3). E' l'unica componente dell'intero rivelatore in grado di tracciare pioni lenti, che non arrivano ai sottorivelatori successivi a causa del loro basso impulso in direzione trasversa ($p_T < 120 \text{ MeV}$).

5.3.2 La camera a deriva

La camera a deriva (Drift CHamber,DCH) costituisce il dispositivo di tracciamento principale. La camera, riempita di elio-isobutano, contiene più di 8000 fili suddivisi in fili di campo e fili di senso. I fili di campo servono a generare un campo elettrico. Quando una particella carica attraversa la camera, essa ionizza l'idrocarburo, e gli elettroni prodotti si muovono verso il filo di senso grazie al forte campo elettrico presente. La posizione della traccia ionizzante può essere determinata dal tempo che gli elettroni prodotti dalla ionizzazione impiegano per giungere sul filo di senso. Infatti la velocità di deriva con cui

gli elettroni si muovono verso il filo di senso è determinata dal campo elettrico e dal gas presente all'interno della camera.

La DCH fornisce anche la misura della perdita di energia per unità di lunghezza dE/dx per particelle con impulso nell'intervallo tra 100 e 700 MeV, utile per l'identificazione delle particelle. In BaBar la camera a deriva è costituita da 40 strati cilindrici e concentrici, ognuno costituito da centinaia di celle ciascuna delle quali contiene un filo di senso.

5.4 Il rivelatore Cerenkov a riflessione interna

Il DIRC (Detector of Internally Reflected Cerenkov light) è un rivelatore a luce Cerenkov utilizzato per l'identificazione di particelle cariche. Dalla misura dell'angolo Cerenkov delle tracce è possibile determinare la velocità delle particelle. La radiazione Cerenkov è emessa quando la velocità della particella, v , è superiore alla velocità di propagazione della luce nel mezzo attraversato, ovvero quando è soddisfatta la relazione $v > c/n$, dove c è la velocità della luce nel vuoto e n è l'indice di rifrazione del mezzo. Le particelle cariche polarizzano le molecole del mezzo che, diseccitandosi, emettono radiazione. La luce è emessa sotto il caratteristico angolo θ , dal quale è possibile risalire alla velocità della particella.

$$\cos \theta = \frac{1}{n} \frac{c}{v} \quad (5.4)$$

Il rivelatore è costituito da 116 barre di quarzo (con $n=1.474$), parallele all'asse z , che circondano la camera a deriva. Il cono di luce prodotto dalle particelle con $\beta > 1/n$ si propaga per riflessione totale lungo le sbarre, fino a raggiungere un sistema di fotomoltiplicatori disposto nella parte posteriore del rivelatore. Il principio di funzionamento è mostrato in fig.(5.4). Il DIRC è particolarmente sottile in modo da limitare la perdita di energia subita dalle particelle prima di raggiungere il calorimetro elettromagnetico.

Conoscendo l'impulso, misurato ad esempio dalla DCH, e la velocità misurata dal DIRC è possibile risalire alla massa della particella, rendendone possibile l'identificazione.

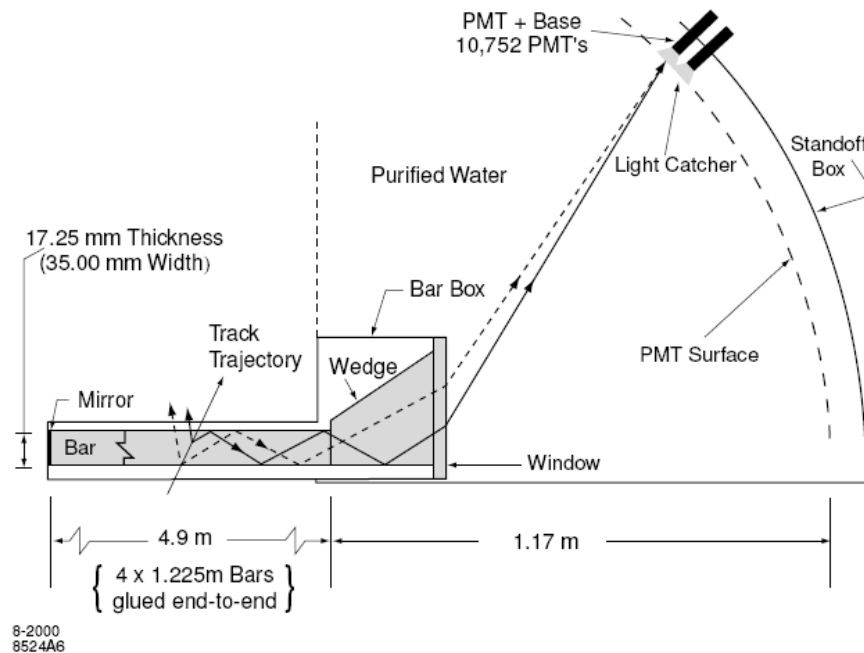


Figura 5.4: Funzionamento del DIRC.

5.5 Il calorimetro elettromagnetico

Nel calorimetro elettromagnetico viene misurata l'energia e la posizione delle particelle sia cariche che neutre, attraverso l'assorbimento delle particelle stesse. La perdita di energia avviene attraverso la formazione di sciame di nuove particelle. Gli sciame possono essere di tipo adronico ed elettromagnetico, a seconda della particella che innesca il processo.

BaBar adopera un calorimetro elettromagnetico (ElectroMagnetic Calorimeter, EMC), nel quale le particelle vengono identificate principalmente dall'ammontare di energia rilasciata e dalla forma dello sciame. Elettroni e fotoni vengono assorbiti completamente e formano sciame poco estesi longitudinalmente e lateralmente. Gli adroni vengono assorbiti solo parzialmente e formano sciame molto più complicati ed estesi in entrambe le direzioni. Il compito principale dell'EMC è quello di misurare posizione, energia e identità dei foto-

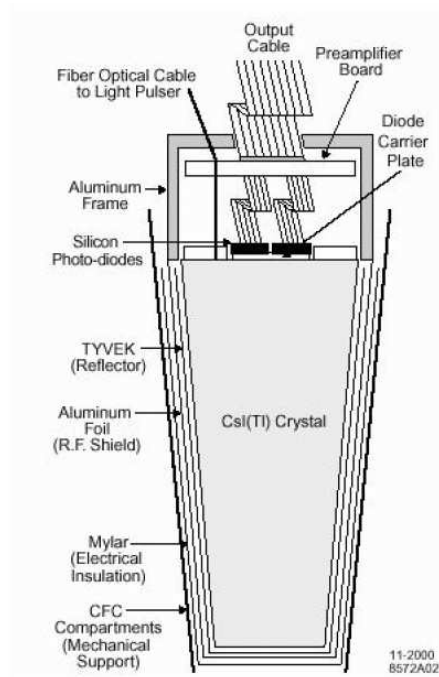


Figura 5.5: Cristallo dell'EMC.

ni, degli elettroni e dei pioni neutri che decadono in due fotoni. L'EMC è composto da 6580 cristalli di Ioduro di Cesio attivati al Tallio. Ogni cristallo è un tronco di piramide trapezoidale con uno spessore, che varia con l'angolo polare, tra 16 e 17.5 lunghezze di radiazione. La faccia frontale è tipicamente di $\sim 6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$. La luce di scintillazione prodotta da ciascun cristallo viene infine raccolta da due fotodiodi, e quindi convertita in segnale. In fig.(5.5) è mostrato un cristallo dell'EMC.

5.6 Il magnete

L'utilizzo del magnete serve per garantire una misura ottimale dell'impulso delle particelle cariche, curvate secondo la relazione

$$R = p_T / (qB) \quad (5.5)$$

dove con R si indica il raggio di curvatura, con p_T l'impulso trasverso al campo B e con q la carica della particella.

Il campo magnetico utilizzato da *BaBar* è pari a 1.5 T, ed è prodotto da un solenoide superconduttore di raggio pari a 140 cm e con asse coincidente con la direzione dei due fasci. Una struttura in ferro circonda completamente il solenoide, garantendo il ritorno del flusso. La scelta delle caratteristiche specifiche dell'EMC deve conciliare una buona risoluzione in impulso con le limitate dimensioni, condizione necessaria per contenere il volume, e quindi il costo, del calorimetro.

5.7 L'IFR

I muoni non producono sciame in un calorimetro elettromagnetico in quanto la radiazione emessa da una particella carica per Bremsstrahlung è inversamente proporzionale alla massa. La rivelazione di queste particelle avviene nella parte più esterna dell'intero rivelatore. In *BaBar* il sottorivelatore più esterno prende il nome di IFR, *Instrumented Flux Return*. Esso viene utilizzato per la rivelazione dei muoni e degli adroni neutri a lunga vita media. L'IFR ha anche il compito di garantire il flusso di ritorno del magnete solenoidale. A tal fine l'IFR è costituito da strati di ferro e acciaio, alternati con strati che permettono di rivelare il passaggio di particelle oppure lo sciame generato all'interno degli strati di ferro.

Nel progetto iniziale di *BaBar*, tutti gli strati erano costituiti da ferro e i rivelatori attivi da *Resistive Plate Chamber* (RPC). La rapida perdita in efficienza di questi rivelatori ne ha motivato la sostituzione con i *Limited Streamer Tubes* (LST).

5.8 L'identificazione sperimentale di eventi *ISR*

Vengono ora discusse le caratteristiche del rivelatore relative alla ricerca di eventi *ISR* e alla misura dell'energia del centro di massa $\sqrt{s}$

L'emissione del fotone γ_{ISR} può avvenire ad un angolo qualsiasi rispetto alla linea dei fasci delle particelle iniziali. La configurazione favorita dalla densità di probabilità di emissione è quella in cui γ_{ISR} è collineare ai fasci collidenti, ovvero per i valori di angolo $\theta \sim 0^\circ$ e $\theta \sim 180^\circ$. Non essendo il fotone dotato di carica elettrica, non viene rilevato dal sistema di tracciamento composto dal SVT e dalla DCH come descritto nel par.(5.3). La prima evidenza è data dall'energia rilasciata nell'EMC (par:5.5). Date le dimensioni longitudinali limitate del rivelatore, non tutti gli angoli di emissione del γ_{ISR} permettono al fotone stesso di giungere nel calorimetro e disperdere completamente la sua energia per via della cascata elettromagnetica. I candidati γ_{ISR} sono pertanto le particelle che producono un'evidenza nel EMC, senza essere associati ad una traccia ricostruita dal sistema di tracciamento. In ref.[29] si stima che il 10 – 15% di fotoni da radiazione iniziale siano emessi entro l'accettanza sperimentale del rivelatore.

Nella selezione degli eventi utilizzati per l'analisi dati del capitolo conclusivo si adottano delle richieste comuni affinché un fotone rilevato sia classificato come γ_{ISR} . In ogni evento soltanto il fotone più energetico può essere considerato come fotone candidato γ_{ISR} . I vincoli sull'energia di un generico fotone e sull'angolo di emissione sono fissati a: $E_\gamma > 30$ MeV e angolo polare $20^\circ < \theta < 140^\circ$ nel riferimento del laboratorio. Si osserva che i vincoli imposti sull'angolo di emissione non sono simmetrici in quanto il rivelatore è spostato in avanti rispetto al punto di interazione dei fasci per via dell'asimmetria dell'energia dei fasci collidenti. Tra tutti i candidati fotoni di un evento che soddisfano queste richieste generali, se un fotone ha $E_{\gamma_{ISR}} > 3$ GeV esso viene ipotizzato essere il fotone emesso dalla radiazione iniziale, ovvero γ_{ISR} .

Nella ricostruzione degli eventi con tracce di particelle cariche l'impulso del fotone prodotto in *ISR* viene stimato dalla conservazione del momento, infatti la ottima risoluzione della DCH permette una misura migliore di quella fornita dalla dispersione di energia nell'EMC. Il fotone *ISR* non rivelato viene emesso fuori dall'accettanza del calorimetro

elettromagnetico.

Il compito principale del DIRC è la distinzione tra pioni e kaoni carichi dotati di alto momento. Per bassi momenti la distinzione tra le due particelle è basata sulla misura della perdita di energia per unità di lunghezza nel DCH.

Capitolo 6

Strategia di analisi

Dalla diagonalizzazione dell'Hamiltoniana efficace che descrive gli stati con $J^{PC} = 1^{--}$ segue che per descrivere la risonanza $Y(2175)$ come stato a quattro quark, tetraquark in breve, è necessario assumere una delle seguenti configurazioni per il diquark: $[sq]$, con interazione di spin tra i diquark soppressa, oppure $[ss]$.

All'inizio di questo capitolo vengono presentati i possibili canali di decadimento sotto entrambe le assunzioni, in modo da trovare una possibile discriminante tra i due contenuti in quark $[sq]$ oppure $[ss]$. Gli stati finali considerati a tal fine sono i seguenti ϕf_0 , $\Lambda\bar{\Lambda}$, $\phi\eta$. Nel secondo paragrafo viene mostrata la selezione degli eventi nei tre stati finali, con attenzione alla ricostruzione degli eventi nell'esperimento *BaBar*. In conclusione si discute la formula della sezione d'urto utilizzata nell'analisi dati del capitolo successivo.

6.1 Possibili modi di decadimento della $Y(2175)$

Al fine di determinare la composizione in quark dello stato $Y(2175)$ è necessario trovare nei dati sperimentali una discriminante tra le due configurazioni $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ e $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$ favorite dall'analisi teorica svolta nel cap.(4). Di seguito vengono mostrati quali stati finali è possibile ottenere in tre diverse modalità di decadimento, sotto entrambe le configurazioni in quark per lo stato iniziale $Y(2175)$. Ne risulta che il decadimento in

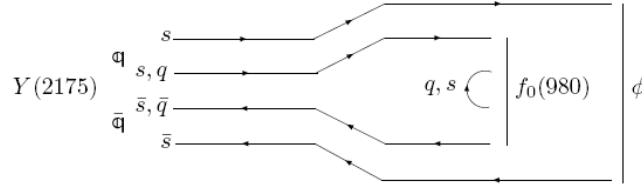


Figura 6.1: Canale di scoperta ottenuto per creazione di coppia $q\bar{q}$ oppure $s\bar{s}$

barioni costituisce un forte discriminante tra le due ipotesi sulla composizione in quark della $Y(2175)$.

6.1.1 Produzione di coppia $q\bar{q}$

La $Y(2175)$ è stata osservata per la prima volta nel suo decadimento in $\phi(1020)f_0(980)$ come introdotto nel par.(1.4). Il mesone $\phi(1020)$ ha contenuto in quark dominato dalla coppia $s\bar{s}$, mentre il contenuto in quark del tetraquark $f_0(980)$ è dato sia da quark leggeri q che da quark pesanti s (par.(2.3)). La presenza di uno stato a quattro quark nello stato finale suggerisce l'interpretazione dell' $Y(2175)$ come stato a quattro quark.

Lo stato finale $\phi(1020)f_0(980)$ si spiega attraverso la produzione di una coppia quark-antiquark dal vuoto, come mostrato in fig.(6.1).

Nel caso dell'interpretazione $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$ si deve trattare di una coppia di quark leggeri $q = u, d$.

Nel caso dell'interpretazione $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ è necessaria la creazione di una coppia di quark dotati di stranezza.

Dai dati sperimentali non è possibile risalire alla coppia creata per la produzione dello stato finale, perciò il canale di scoperta non fornisce alcuna discriminazione tra le possibili interpretazioni $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ e $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$.

I numeri quantici delle particelle nello stato finale sono dati da $J_\phi^{PC} = 1^{--}$ e $J_{f_0}^{PC} = 0^{++}$.

Assumendo nulla l'eccitazione angolare tra i due mesoni, ossia $L_{\phi f_0} = 0$, si ottiene la

conservazione dei numeri quantici dello stato iniziale $J_Y^{PC} = 1^{--}$, come richiesto dall'interazione forte che media il processo. Dalla composizione dei momenti angolari risulta che l'unico valore di J consentito nello stato finale è $J = 1$. La parità dello stato finale è negativa, data dal prodotto delle parità intrinseche in quanto $L_{\phi f_0} = 0$. Infine si osserva che per ottenere il corretto comportamento sotto coniugazione di carica è sufficiente eseguire il prodotto degli autovalori di C dei singoli stati.

E' inoltre possibile, tramite la creazione di coppie quark-antiquark, ottenere uno stato finale differente. In fig.(6.2) è mostrata la situazione in cui tre quark sono raggruppati insieme per formare un barione, i rimanenti tre antiquark formano il corrispondente antibarione. Questo rappresenta il modo più naturale di decadimento di un tetraquark.

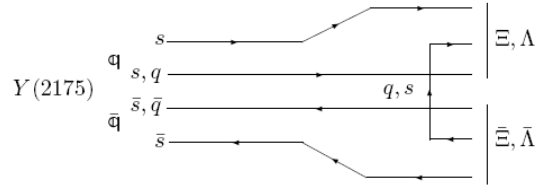


Figura 6.2: Stato finale barionico ottenuto per creazione di coppia $q\bar{q}$ oppure $s\bar{s}$

Infatti se la forza di colore che tiene legati i due quark a formare un diquark diminuisce, i due quark sono liberi di legarsi ad un terzo quark creato dal vuoto e dar luogo ad uno stato barionico finale. Per un mesone descritto dal modello $q\bar{q}$, il decadimento in uno stato finale contenente barioni non è favorito, in quanto necessita di una doppia creazione di coppia.

Il diagramma mostrato in fig.(6.2) sottolinea come per lo stato $\Lambda\bar{\Lambda}$ è necessario rompere i diquark di partenza. Come descritto nel par.(3.2.1) il barione Λ può essere interpretato come uno stato di tre quark, due dei quali sono legati a formare la struttura diquark. Per tal motivo nel diagramma in fig.(6.2), interpretando la $Y(2175)$ come uno stato costituito da $[sq][\bar{s}\bar{q}]$, il quark leggero q proveniente dal diquark della $Y(2175)$ è legato al quark

leggero q creato dal vuoto.

Nel caso dell'interpretazione $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$, con creazione di una coppia di quark leggeri $q = u, d$, si ottiene uno stato finale dato dai barioni $\Xi\bar{\Xi}$, con $\Xi = (qss)$. La soglia di produzione della coppia barionica è 2630 MeV. La massa del mesone $Y(2175)$ è circa 500 MeV inferiore a questo valore, quindi la produzione dello stato finale $\Xi\bar{\Xi}$ è soppressa dallo spazio delle fasi.

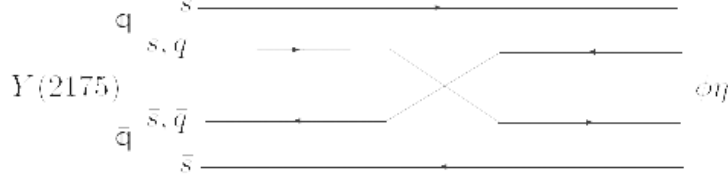
Nel caso dell'interpretazione $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$, con creazione di una coppia di quark leggeri $q = u, d$, si ottiene uno stato finale dato dai barioni $\Lambda\bar{\Lambda}$, con $\Lambda = (qqs)$. La soglia di produzione di questa coppia barionica è 2230 MeV: questo stato finale è meno di 100 MeV sotto soglia di produzione in quanto la massa del mesone $Y(2175)$ è inferiore alla somma delle masse delle due particelle che compongono lo stato finale.

I numeri quantici del barione Λ sono fissati essere $J_\Lambda^P = \frac{1}{2}^+$. Il sistema $\Lambda\bar{\Lambda}$ ha pertanto il giusto comportamento sotto l'operazione di parità con $L_{\Lambda\bar{\Lambda}} = 0$. Ricordando che la coniugazione di carica del sistema particella-antiparticella segue la regola generale $(-1)^{L+S}$, risulta che per ottenere il corretto stato $J^{PC} = 1^{--}$ bisogna assumere $S_{\Lambda\bar{\Lambda}} = 1$.

E' possibile ottenere lo stato finale $\Lambda\bar{\Lambda}$ partendo dall'interpretazione $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$? Questo è un punto chiave per l'analisi dati ed è discusso tra breve.

6.1.2 Scambio $q\bar{q}$

Un altro modo di produrre stati finali è lo scambio di quark, ossia il 'crossing', come mostrato in fig.(6.3). In questa ipotesi non ci sono vertici di interazione, ma semplicemente lo scambio tra un quark legato nel diquark con un antiquark legato nell'antidiquark. Affinche questo avvenga è necessario per il quark vincere la barriera di potenziale che nasce dall'ipotesi di eccitazione angolare non nulla tra il diquark e l'antidiquark. Le due possibili composizioni in termini di quark della $Y(2175)$ danno luogo agli stessi stati finali. Pertanto anche questo canale di decadimento non fornisce fattori discriminanti tra

Figura 6.3: Stato finale ottenuto per scambio $q\bar{q}$ ossia 'crossing'

$$Y = [sq][\bar{s}\bar{q}] \text{ e } Y = [ss][\bar{s}\bar{s}].$$

In entrambi i casi si ottengono come stati finali due mesoni. Considerando i quark dello stato finale e i valori delle masse dei mesoni con tale contenuto in quark risulta che il canale $\phi\eta$ ha i giusti numeri quantici per essere un possibile decadimento della risonanza $Y(2175)$. Stati finali quali $\phi\phi$ e $\eta\eta$ sono permessi a livello di quark ma non soddisfano la conservazione della coniugazione di carica e la statistica di Bose. In fig.(6.3) si hanno due quark strani che non partecipano allo scambio e sono direttamente portati nello stato finale per legarsi nel mesone ϕ . I quark al centro del diagramma, se leggeri costituiscono la componente leggera del mesone η , altrimenti la sua componente $s\bar{s}$.

I mesoni dello stato finale hanno i seguenti numeri quantici $J_\phi^{PC} = 1^{--}$ e $J_\eta^{PC} = 0^{-+}$. Per soddisfare la conservazione dei numeri quantici dello stato iniziale è necessario assumere un decadimento in onda P, ovvero con $L_{\phi\eta} = 1$.

6.1.3 Vertice istantonico

Un terzo modo possibile per dar luogo a stati finali è attraverso il vertice istantonico mostrato in fig.(6.4). Questo è un vertice che permette l'interazione di 6 fermioni, come discusso in [30]. Al fine di quanto segue è sufficiente osservare che l'interazione è proporzionale a $L_{\mathcal{I}} \propto \det(\bar{q}_L^i q_R^j)$, dove i, j sono gli indici di sapore. Nello stesso vertice quindi confluiscono simultaneamente i tre quark u, d, s ed i rispettivi antiquark. Attraverso i decadimenti di un mesone scalare in due pseudoscalari in [30] si dimostra che l'accoppia-

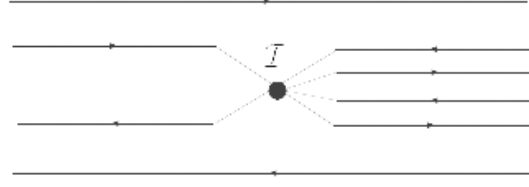


Figura 6.4: Stato finale barionico ottenuto per interazione a 6 fermioni tramite vertice istantonico

mento dato dal vertice istantonico è un processo sottodominante rispetto alla creazione di coppia quark-antiquark dal vuoto e allo scambio di quark di un fattore dieci.

Nel caso dell'interpretazione $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$ si hanno due quark strani in entrata al vertice istantonico e due coppie quark-antiquark leggere in uscita. La ricombinazione più immediata è quella che da luogo a due barioni nello stato finale: la coppia $\Lambda\bar{\Lambda}$. Risulta quindi che lo stato finale barionico può essere prodotto anche dalla $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$, ma attraverso un'interazione tra 6 fermioni. Questa interazione è soppressa di un ordine di grandezza rispetto alla formazione dello stesso stato finale tramite creazione di coppia. In base alle evidenze sperimentali del decadimento $Y \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ si può discriminare tra le composizioni in termini di quark favorite dall'analisi teorica in par.(4.2.2)

Nel caso dell'interpretazione $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ l'interazione tramite vertice istantonico, con ricombinazione barionica dei quark nello stato finale, porta a stati quali $p\bar{p}$. Altri possibili stati finali sono dati dal canale contenente un tetraquark, $\sigma\pi$, e dai canali contenenti tre particelle, $\pi\pi\pi$ oppure $\eta\pi^0\pi^0$.

Da quanto esposto risulta che un decadimento dominante $Y(2175) \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ è spiegato dall'ipotesi $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ ma non da $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$. La difficoltà di questo canale è data dalla soglia di produzione $\Lambda\bar{\Lambda}$ superiore alla massa della particella che decade.

6.2 Dati sperimentali relativi ai possibili decadimenti della $Y(2175)$

I decadimenti che verranno analizzati dal punto di vista sperimentale sono relativi ai tre canali:

$$\begin{array}{ll} Y(2175) \rightarrow \phi(1020)f_0(980)\gamma_{ISR} & \text{canale di scoperta} \\ Y(2175) \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}\gamma_{ISR} & \text{canale barionico} \\ Y(2175) \rightarrow \phi(1020)\eta\gamma_{ISR} & \text{canale mesonico} \end{array}$$

Tutti i dati provengono dalla collaborazione *BaBar* e sono pubblicati e analizzati nelle referenze date in seguito. Si esegue una nuova analisi dei dati ai fini di trovare un riscontro sperimentale dell'interpretazione del mesone $Y(2175)$ come stato tetraquark.

E' possibile eseguire una prima selezione degli eventi comune a tutti i canali. Per ognuno dei tre canali sopra citati, si selezionano soltanto gli eventi in cui almeno un fotone energetico ($E_\gamma > 3 \text{ GeV}$) venga osservato nell'EMC, in direzione opposta ad un certo numero di tracce cariche e fotoni con almeno 30 MeV in energia. Tra tutti i fotoni di un singolo evento, il più energetico è identificato come fotone candidato prodotto in ISR e viene indicato con γ_{ISR} . La richiesta sul numero delle tracce ricostruite dal sistema di tracciamento varia da canale a canale, con la comune richiesta di punto iniziale di tutte le tracce nella zona di interazione (distanza radiale dall'asse dei fasci = 0.25 cm, distanza lungo l'asse = 3 cm dal punto di interazione).

Per stabilire con minor incertezza l'impulso e la direzione delle particelle osservate si utilizza la tecnica del fit cinematico. Questo si basa sulla minimizzazione della funzione χ^2 definita come

$$\chi^2 = (\vec{y} - \vec{y}_0)^T V^{-1} (\vec{y} - \vec{y}_0) + 2\vec{\lambda} \vec{f}(\vec{y}) \quad (6.1)$$

dove con $\vec{y}$ si indica il vettore contenente le informazioni misurate dal detector, con $\vec{y}_0$ i corrispondenti valori stimati dal fit, V indica la matrice di covarianza e i vincoli sono imposti tramite i moltiplicatori di Lagrange λ e le funzioni $f(\vec{y})$. Un vincolo comune a tutti i fit cinematici eseguiti per la scelta degli eventi ISR che verranno rianalizzati

è la richiesta di massa nulla del candidato fotone γ_{ISR} , oltre alla richiesta di vicinanza delle tracce al punto di interazione. I valori delle variabili cinematiche misurate vengono variate entro gli errori sperimentali al fine di ottenere parametri da fit che minimizzino il χ^2 . Questi nuovi valori, che costituiscono gli elementi del vettore $\vec{y}_0$, ottimizzano i valori misurati dal rivelatore e sono utilizzati per tutte le selezioni degli eventi successive.

E' utile definire come viene calcolata la sezione d'urto di un processo una volta effettuata la selezione degli eventi in un determinato canale. Si definisce

$$\sigma(f)(E_{c.m.}) = \frac{N_f(E_{c.m.})}{\mathcal{L}(E_{c.m.})\epsilon(E_{c.m.})} \quad (6.2)$$

con $E_{c.m.}$ massa invariante dello stato finale f . Con $\sigma(f)$ si indica la sezione d'urto dello stato finale f , con N_f il numero di eventi selezionati nel canale f sotto esame. ϵ rappresenta l'efficienza del rivelatore (corretta da studi di simulazione) e $\mathcal{L}$ indica la luminosità integrata contando il numero di eventi Bhabha ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) e dividendo per la sezione d'urto e l'efficienza note. Per tenere conto della radiazione ISR la (6.2) va ancora divisa per la funzione radiatore.

6.2.1 Canale di scoperta $e^+e^- \rightarrow \phi f_0 \gamma_{ISR}$: tetraquark nello stato finale

La selezione degli eventi applicata per lo studio del canale $e^+e^- \rightarrow \phi f_0 \gamma_{ISR}$ è descritta di seguito, con riferimento alla referenza [33]. Lo studio di questo processo si effettua tramite una selezione degli stati finali $K^+K^-\pi^+\pi^-$ e $K^+K^-\pi^0\pi^0$, con la presenza del fotone prodotto dalla radiazione iniziale γ_{ISR} . Infatti il decadimento dominante osservato del mesone f_0 è in due π , come specificato in par.1.3, mentre la frazione di decadimento più significativa (49%) del mesone $\phi(1020)$ è in due K carichi.

La prima selezione richiede, oltre ad almeno un fotone energetico ($E_\gamma > 3 \text{ GeV}$), due o quattro tracce cariche. Se vengono ricostruite quattro tracce, indipendentemente dall'avvenuta identificazione delle particelle, si esegue un fit cinematico con l'ipotesi di 4π , che

ritorna un $\chi^2_{4\pi}$.

Se tra le 4 tracce cariche si identificano due K (carichi), viene in più eseguito un fit con l'ipotesi $2K2\pi$ che ritorna $\chi^2_{2K2\pi}$. L'evento è considerato come evento $K^+K^-\pi^+\pi^-$ se valgono entrambe le disuguaglianze: $\chi^2_{2K2\pi} < \chi^2_{4\pi}$ e $\chi^2_{2K2\pi} < 30$.

Se tra le 4 tracce cariche si identifica un solo K, le rimanenti tre tracce vengono studiate a coppie in modo da identificare un secondo mesone K. Di nuovo i fit eseguiti sono del tipo 4π e $K^+K^-\pi^+\pi^-$ e valgono le richieste sul χ^2 : $\chi^2_{2K2\pi} < \chi^2_{4\pi}$ e $\chi^2_{2K2\pi} < 30$.

Se le tracce cariche osservate sono due, per la selezione dell'evento si richiede la presenza di almeno 5 fotoni (uno dei quali è il candidato γ_{ISR}). I fotoni meno energetici vengono studiati a coppie in modo da ricostruire il decadimento di un π^0 che al 99% decade in una coppia di fotoni $\gamma\gamma$. La differenza tra la massa ricostruita dei due fotoni e la massa nominale del π^0 è richiesta essere inferiore a 35 MeV e $\chi^2_{2K2\pi^0} < 50$: questo seleziona gli eventi del tipo $K^+K^-\pi^0\pi^0$. Un possibile evento $K^+K^-\pi^0$, combinandosi con fotoni poco energetici, può essere interpretato erroneamente come evento $K^+K^-\pi^0\pi^0$. Per evitare questo, si richiede che le energie dei fotoni che ricostruiscono la coppia di pioni neutri sia comparabile.

Una volta identificati gli eventi candidati $K^+K^-\pi^+\pi^-$ e $K^+K^-\pi^0\pi^0$, si selezionano quelli in cui la coppia di kaoni carichi proviene dal decadimento del mesone $\phi(1020)$ e simultaneamente la coppia dei pioni dal decadimento del tetraquark $f_0(980)$. Si richiede che valga la disuguaglianza $|m(K^+K^-) - m(\phi)| < 10 \text{ MeV}$, mentre la massa ricostruita dalla coppia di pioni deve essere nella finestra (0.85-1.1 GeV). Con queste richieste si selezionano 700 eventi nel canale $K^+K^-\pi^+\pi^-$, distribuiti in intervalli da 25 MeV in energia. I 120 eventi nel canale $K^+K^-\pi^0\pi^0$ sono affetti da errori significativamente maggiori e non verranno integrati nella rianalisi sviluppata nel par.(7.2).

Attraverso questa procedura si selezionano circa 34600 eventi e ne viene calcolata la sezione d'urto in intervalli da 25 MeV.

6.2.2 Canale barionico: $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda} \gamma_{ISR}$

La selezione degli eventi applicata per lo studio del canale $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda} \gamma_{ISR}$ è descritta di seguito, con riferimento a [34]. Lo studio di questo processo si effettua tramite una selezione degli stati finali $\pi^+ \bar{p} \pi^- p$, oltre al fotone γ_{ISR} . Infatti il decadimento principale del barione Λ è dato da $\Lambda \rightarrow p \pi^-$, con frazione del 64%.

La prima selezione degli eventi è basata sulla presenza di almeno quattro tracce cariche, con carica totale nulla, oltre al fotone altamente energetico. Le tracce vengono combinate a coppie, in modo da ricostruire un candidato barione Λ e un $\bar{\Lambda}$. L'evento viene selezionato se il fit cinematico ritorna $\chi^2 < 20$. Si richiede un impulso minimo $\vec{p}_\Lambda = 0.5 \text{ GeV}$ nel sistema di riferimento del laboratorio per ogni candidato Λ e un valore di massa entro al finestra $1.104 - 1.128 \text{ GeV}$.

Un possibile evento $e^+e^- \rightarrow \Lambda \bar{p} K^+ \gamma$ è escluso dall'esplicito vincolo di non identificare particelle K tra i candidati π .

Attraverso una tale procedura si selezionano 387 eventi e ne viene calcolata la sezione d'urto in intervalli da 40 MeV.

6.2.3 Canale mesonico: $e^+e^- \rightarrow \phi \eta \gamma_{ISR}$

La selezione degli eventi applicata per lo studio del canale $e^+e^- \rightarrow \phi \eta \gamma_{ISR}$ è descritta di seguito, con riferimento alla referenza [35]. Lo studio di questo processo si effettua tramite una selezione degli stati finali $K^+ K^- \gamma \gamma$, oltre al fotone γ_{ISR} . Come visto in par.(6.2.1) il decadimento in due K carichi costituisce la frazione più significativa dei decadimenti del mesone ϕ (49%). I due fotoni costituiscono il 39% dei decadimenti dell' η e lasciano un chiaro segnale alla massa 0.547 GeV .

I candidati fotoni dell'evento sono considerati a coppie in un fit cinematico al fine di ricostruire il mesone η ed è selezionata la configurazione con χ^2 minimo. Gli eventi con più fotoni sono esclusi dalla selezione sull'energia massima rilasciata nell'EMC in un singolo

evento. Una volta identificato il fotone candidato γ_{ISR} e la coppia di fotoni necessaria alla ricostruzione dell' η , nell'EMC è richiesta essere rilasciata da particelle neutre non più di 400 MeV in energia. La finestra di massa per i fotoni è data da $0.520 - 0.580 \text{ GeV}$.

Affinchè i due K carichi siano provenienti dal decadimento del ϕ , si richiede una massa invariante inferiore a 1.045 GeV .

Si selezionano 483 eventi di segnale che permettono la definizione della sezione d'urto del canale $e^+e^- \rightarrow \phi\eta\gamma_{ISR}$ in 64 intervalli.

6.3 La sezione d'urto

La reanalisi dei dati sperimentali relativi alle reazioni citate nel par.(6.2) è effettuata tramite lo studio della sezione d'urto. Di seguito vengono spiegate le parametrizzazioni utilizzate a tal fine. La sezione d'urto di un processo è proporzionale alla probabilità che quel processo avvenga

$$\sigma = \frac{\text{numero di eventi di un dato tipo nell'unità di tempo}}{\text{numero di eventi nell'unità di tempo e superficie}}$$

Da questa definizione segue che l'unità di misura è il barn, con la conversione $1 \text{ barn} = 1 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$.

In generale per il decadimento di una risonanza Y in uno stato finale f , la sezione d'urto σ in funzione della massa invariante m si può scrivere come

$$\sigma(m) \propto \Phi_{PS}^f(m) |A(m)|^2 \quad (6.3)$$

dove con A si indica l'ampiezza del processo e Φ_{PS}^f rappresenta lo spazio delle fasi delle particelle nello stato finale. La parametrizzazione della risonanza è data dalla formula di Breit e Wigner relativistica $A_r(m)$ discussa in seguito, mentre la parte non risonante dello spettro varia da canale a canale ed è descritta dalla funzione reale $A_{nr}(m)$. Si osserva che la funzione $A_{nr}(m)$ viene scelta in modo da descrivere tutto ciò che non è definito segnale

risonante, pertanto gode di una certa arbitrarietà.

$$A(m) = e^{i\delta} A_{nr}(m) + \sqrt{\sigma_0 \mathcal{B}(Y \rightarrow f)} m_0 \Gamma_0 A_r(m) \quad (6.4)$$

Tra le due componenti è ammessa una fase relativa costante espressa dal fattore $e^{i\delta}$.

L'espressione per $A_r(m)$ si scrive come

$$A_r(m) = \frac{1}{m^2 - m_0^2 + i\Gamma_{\text{tot}}(m)m_0} \quad (6.5)$$

dove la massa della risonanza e la sua larghezza sono indicate rispettivamente con m_0 e $\Gamma_0 = \Gamma_{\text{tot}}(m)|_{m=m_0}$.

La formula di Breit e Wigner relativistica si ricava considerando l'ampiezza di trovare non decaduta una particella instabile in un tempo t . Se si assume che una particella di massa m_0 venga creata al tempo $t = 0$, l'ampiezza di non-decadimento si può esprimere come

$$A(t) \sim A(0) e^{-i\omega(\vec{p})t} e^{-\frac{\Gamma}{2} \frac{1}{\gamma} t} \quad (6.6)$$

dove con ω si indica l'energia $\omega = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2}$, con $\Gamma = 1/\tau$ l'inverso della vita media della particella instabile e il fattore $1/\gamma$ rappresenta la dilatazione relativistica di τ . Il primo esponenziale tiene conto della evoluzione temporale in meccanica quantistica. Il secondo è invece reale in quanto è il fattore che indica il decadimento. La stessa ampiezza si deve ritrovare considerando il propagatore della particella che è proporzionale alla quantità

$$\frac{1}{p^2 - m_0^2} = \frac{1}{(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2}) \cdot (p^0 + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_0^2})} = \frac{1}{(p^0)^2 - \omega^2} \quad (6.7)$$

dove con p si indica il quadrimpulso della particella. Si osserva che, nel caso di particelle instabili, per tener conto dell'ampiezza di decadimento non nulla è stato introdotto un fattore esponenziale reale in eq.(6.6) che equivale a considerare la sostituzione

$$\omega \rightarrow \omega - i \frac{\Gamma}{2\gamma} \quad (6.8)$$

Pertanto si può approssimare per $\Gamma \ll m_0$ il propagatore per una particella instabile come

$$\frac{1}{(p^0)^2 - \omega^2} \rightarrow \frac{1}{(p^0)^2 - (\omega - i\frac{\Gamma}{2\gamma})^2} \sim \frac{1}{(p^0)^2 - \omega^2 + im_0\Gamma} \quad (6.9)$$

dove è stata usata la relazione $\gamma = \omega/m$. Questa espressione coincide con quella riportata in eq.(6.5) con la differente notazione utilizzata per indicare l'energia. La eq.(6.9) prende il nome di ampiezza di Breit e Wigner relativistica. Si osserva che la seguente proprietà

$$A_r(m_0) = 2A_r(m_0 \pm \frac{\Gamma}{2}) \quad (6.10)$$

è una buona approssimazione nel limite considerato $\Gamma \ll m_0$, ovvero Γ rappresenta la larghezza della curva a metà altezza. Il massimo della funzione si ha per $m = m_0$. Qui la sezione d'urto risonante assume il valore $\sigma_0 \mathcal{B}$ in base alla definizione in eq.(6.4).

Nella funzione $A_r(m)$ si tiene conto della dipendenza della larghezza della risonanza dalla massa invariante m , attraverso la definizione della Γ_{tot} [36]

$$\Gamma_{\text{tot}}(m) = \Gamma_0 \left(\frac{\vec{p}}{\vec{p}_0} \right)^{2L+1} \left(\frac{m_0}{m} \right) (F_L(\vec{p}))^2 \quad (6.11)$$

Con $\vec{p}$ si indica l'impulso di decadimento delle particelle dello stato finale $f = a + b$ nel sistema di riferimento in cui la risonanza Y decade ferma. In questo sistema, applicando la conservazione dell'energia e dell'impulso al decadimento $Y \rightarrow a + b$ si ottiene

$$p^2 = \frac{[m^2 - (m_a + m_b)^2] \cdot [m^2 - (m_a - m_b)^2]}{4m^2} \quad (6.12)$$

Il valore di $\vec{p}_0$ si ottiene da questa espressione calcolata in $m = m_0$. Si osserva che se la massa nominale della risonanza m_0 è al di sotto della soglia di produzione dello stato finale data dalla somma $m_a + m_b$, il valore di p^2 è negativo: questo si riflette nello spazio delle fasi e nella definizione della larghezza dipendente dalla massa che assumono valore immaginario. I coefficienti $F_L(\vec{p})$ in (6.11) prendono il nome di coefficienti di Blatt e Wiesskopf e sono funzione del momento angolare orbitale L tra le particelle dello stato

finale f . L'utilizzo di questi coefficienti è utile per modulare l'andamento dello spazio fasi per valori di $L > 1$, non più lineare nell'impulso di decadimento $\vec{p}$

$$\Phi_{PS}^f(m) = \left(\frac{\vec{p}}{\vec{p}_0}\right)^{2L+1} \left(\frac{m_0}{m}\right) \quad (6.13)$$

I coefficienti di Blatt e Weisskopf sono introdotti in [36] nell'analisi della sezione d'urto di trasmissione attraverso una barriera di potenziale generata per via di un momento angolare non nullo. Viene discussa la penetrazione di un potenziale radiale, generato per $r < R$ da un sistema dotato di momento angolare, da una particella proveniente da $r = \infty$. Si trova che la sezione d'urto dipende dalle derivate logaritmiche della funzione d'onda radiale $u(r)$ che descrive il sistema calcolate per $r = R$, ovvero alla distanza che definisce la barriera centrifuga (raggio del sistema con momento angolare non nullo).

Il decadimento della risonanza Y in uno stato finale dotato di momento angolare è del tutto analogo al caso della trasmissione, infatti anche in questo caso esiste un potenziale centrifugo da superare. Nel caso di particelle neutre, per piccoli valori di L si hanno le seguenti espressioni approssimate

$$\begin{aligned} L=0 & \quad F \sim 1 \\ L=1 & \quad F \sim \sqrt{\frac{1 + (R|\vec{p}_0|)^2}{1 + (R|\vec{p}|)^2}} \\ L=2 & \quad F \sim \sqrt{\frac{9 + 3(R|\vec{p}_0|)^2 + (R|\vec{p}_0|)^4}{9 + 3(R|\vec{p}|)^2 + (R|\vec{p}|)^4}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

dove entra la definizione del raggio R entro il quale è presente il potenziale centrifugo. I valori di R sono funzione della massa del sistema dotato di momento angolare non nullo.

Tra i processi studiati

$$\begin{aligned} e^+e^- & \rightarrow \phi(1020)f_0(980)\gamma_{ISR} \\ e^+e^- & \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}\gamma_{ISR} \\ e^+e^- & \rightarrow \phi(1020)\eta\gamma_{ISR} \end{aligned} \quad (6.15)$$

solamente l'ultimo è un decadimento in onda-p ($L=1$), essendo i primi due permessi in onda-s ($L=0$).

Capitolo 7

Rianalisi dei dati sperimentali

Nella descrizione precedente a questo ultimo capitolo si è trovato nel decadimento barionico un possibile discriminante tra le composizioni in quark $[sq][\bar{s}\bar{q}]$ e $[ss][\bar{s}\bar{s}]$ del mesone $Y(1275)$ interpretato come tetraquark. Si vogliono ora studiare i dati sperimentali relativi ai decadimenti della $Y(2175)$, ai fini di testare la compatibilità con l'ipotesi di una unica risonanza comune e assegnarne il contenuto in quark favorito.

In questo capitolo viene presentata la rianalisi relativa ai tre processi di decadimento della Y analizzati in par.(6.2). Si usa il canale di scoperta per determinare i parametri della risonanza e gli altri due per studiare la rate di decadimento. Il canale barionico $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$ suscita particolare interesse in quanto ci sono indicazioni significative circa la struttura $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$ rispetto $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$. I dati utilizzati sono stati pubblicati e analizzati dalla collaborazione *BaBar*, nel seguito se ne esegue una rianalisi sperimentali, al fine di uniformare la notazione e permettere la procedura di fit simultaneo.

7.1 Procedura generale di fit

La sezione d'urto di un processo con risonanza intermedia presenta un picco più o meno pronunciato centrato al valore della massa m_0 della risonanza e con larghezza a metà altezza pari al valore di Γ_0 , parametro legato alla vita media della risonanza. Per

descrivere questo comportamento si utilizza la parametrizzazione tramite la formula di Breit e Wigner discussa nel par.6.3. Il resto dei dati sperimentali deve essere riprodotto dalla scelta di una adeguata funzione non risonante indicata con A_{nr} in eq.(6.4).

La procedura di fit sviluppata si basa sulla minimizzazione della funzione χ^2

$$\chi^2(\vec{\theta}) = (\vec{y} - \vec{y}_0(\vec{\theta}))^T V^{-1} (\vec{y} - \vec{y}_0(\vec{\theta})) \quad (7.1)$$

dove con $\vec{y}$ si indica il vettore delle quantità osservate, con $\vec{y}_0$ i valori delle stesse quantità stimate tramite fit, funzione dei parametri di fit espresse nel vettore $\vec{\theta}$ e con V^{-1} la matrice di covarianza delle $\vec{y}$. Il valore di aspettazione del χ^2 calcolato nel punto di minimo è dato dai gradi di libertà del fit (DOF), ossia dalla differenza tra il numero di dati sperimentali a disposizione e il numero di parametri lasciati liberi nella procedura di fit. La covarianza dei parametri fittati è espressa dalla matrice $\bar{V}^{-1}$ i cui elementi sono definiti da

$$\bar{V}_{ij}^{-1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad (7.2)$$

La ricerca dei parametri che minimizzano il χ^2 , e quindi la procedura di fit, è effettuata in ambiente ROOT [31]. Di questo vengono sfruttate alcune librerie, classi e funzioni al fine di compilare un programma in C++ scritto appositamente per l'analisi dati effettuata.

In particolare si costruisce un istogramma monodimensionale tramite la classe TH1F. L'intervallo in energia dei bin è fissato dai dati sperimentali a disposizione e il contenuto del bin è il valore della sezione d'urto con associato il relativo errore. Attraverso la classe TF1 si può visualizzare la funzione monodimensionale da fittare sui dati sperimentali. Il fit è effettuato sull'istogramma: vanno specificati il numero di parametri da variare al fine di minimizzare il χ^2 , i valori iniziali da cui partire e si possono anche imporre dei vincoli sull'intervallo di variabilità del singolo parametro. La ricerca del minimo avviene tramite la chiamata iterativa dell'algoritmo Migrad implementato da MINUIT [32], che termina il processo di minimizzazione se raggiunge una differenza preimpostata tra due iterazioni successive.

7.1.1 Il fit simultaneo a più canali

Testare l'ipotesi che tutti i processi esaminati

$$\begin{aligned}
 e^+e^- &\rightarrow \phi(1020)f_0(980)\gamma_{ISR} \\
 e^+e^- &\rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}\gamma_{ISR} \\
 e^+e^- &\rightarrow \phi(1020)\eta\gamma_{ISR}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

abbiano la stessa risonanza mesonica intermedia, richiede di effettuare una analisi simultanea nei tre canali. Con questo si intende richiedere che nei tre processi i parametri della risonanza (massa m_0 , larghezza Γ_0 e la sezione d'urto σ_0 per $m = m_0$) siano uguali. In questa tecnica di fit la formula della $\Gamma(m)$, larghezza dipendente dalla massa invariante del sistema finale, ha dei vincoli ulteriori rispetto alla formula valida per il fit al singolo canale discussa in eq.(6.11) Nell'analisi simultanea di più canali (due o tre) viene richiesto che il rapporto tra le sezioni d'urto di picco sia $\mathcal{B}_f$ e che la somma dei $\mathcal{B}_f$ dei canali studiati nel fit sia uno (secondo l'ipotesi che non ci siano altri canali di decadimento con soglie vicine alla massa del mesone). In formule si ha

$$\Gamma_{\text{tot}}(m) = \Gamma_0 \left(1 - \sum_f \mathcal{B}(Y \rightarrow f)(1 - \Phi_{PS}^f(m)(F_L(\vec{p}))^2) \right) \tag{7.4}$$

in modo da tenere in considerazione la frazione di decadimento in ognuno dei diversi canali e il differente fattore di spazio fasi.

I parametri significativi relativi alla risonanza stimati da fit sono la massa nominale m_0 , la larghezza Γ_0 e, nei fit a più canali, i rapporti $\mathcal{R}(f, \phi f_0) = \frac{\mathcal{B}_f}{\mathcal{B}_{\phi f_0}}$ tra le frazioni di decadimento in un canale f rispetto al canale di riferimento $Y \rightarrow \phi f_0$.

Per la descrizione della componente non risonante si fissa la forma funzionale più adeguata, senza fissare nessun parametro. La fase relativa tra le due componenti è un ulteriore parametro di fit.

$E_{c.m.}$ (GeV)	σ (nb)	$E_{c.m.}$ (GeV)	σ (nb)	$E_{c.m.}$ (GeV)	σ (nb)
1.8875	0.02 ± 0.02	2.2375	0.17 ± 0.05	2.5875	0.06 ± 0.03
1.9125	0.07 ± 0.04	2.2625	0.12 ± 0.04	2.6125	0.07 ± 0.03
1.9375	0.30 ± 0.07	2.2875	0.13 ± 0.05	2.6375	0.06 ± 0.03
1.9625	0.27 ± 0.07	2.3125	0.12 ± 0.04	2.6625	0.05 ± 0.03
1.9875	0.25 ± 0.07	2.3375	0.14 ± 0.04	2.6875	0.03 ± 0.02
2.0125	0.25 ± 0.07	2.3625	0.13 ± 0.05	2.7125	0.05 ± 0.02
2.0375	0.28 ± 0.07	2.3875	0.13 ± 0.04	2.7375	0.02 ± 0.01
2.0625	0.43 ± 0.08	2.4125	0.14 ± 0.05	2.7625	0.06 ± 0.02
2.0875	0.28 ± 0.07	2.4375	0.13 ± 0.04	2.7875	0.03 ± 0.02
2.1125	0.54 ± 0.09	2.4625	0.09 ± 0.04	2.8125	0.04 ± 0.02
2.1375	0.46 ± 0.08	2.4875	0.08 ± 0.03	2.9625	0.02 ± 0.01
2.1625	0.56 ± 0.08	2.5125	0.09 ± 0.03	2.8375	0.05 ± 0.02
2.1875	0.38 ± 0.07	2.5375	0.07 ± 0.03	2.8625	0.02 ± 0.02
2.2125	0.21 ± 0.06	2.5625	0.02 ± 0.02	2.8875	0.01 ± 0.01

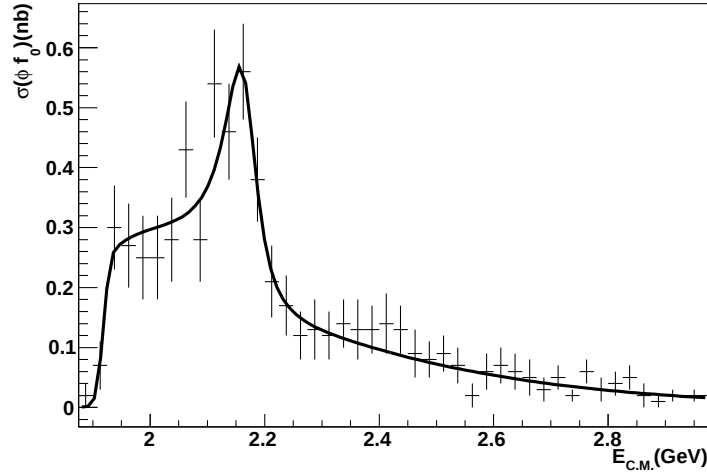
Tabella 7.1: Dati relativi alla sezione d'urto $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)f_0(980)$.

7.2 Il canale di scoperta: $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)f_0(980)$

Lo studio di questo canale singolarmente viene effettuato per constatare l'accordo con la pubblicazione circa la scoperta della risonanza $Y(2175)$ [33] e uniformare la notazione. I dati selezionati per lo studio della sezione d'urto in funzione dell'energia nel centro di massa $E_{C.M.}$ sono riportati in tab.(7.2). Si ricorda, come discusso del par.(6.2.1), che i dati relativi allo stato finale $K^+K^-\pi^0\pi^0$ non vengono inclusi nell'analisi in quanto affetti da errori maggiori. Per descrivere la parte non risonante dello spettro si utilizza la funzione

$$A_{nr} = A \times e^{-k(E-m_{th})} \times (1 - e^{-\left(\frac{E-m_{th}}{a_1}\right)^4}) \quad (7.5)$$

dove il primo esponenziale domina per alti valori di $E_{C.M.}$, mentre la rapida salita della sezione d'urto per bassi valori di $E_{C.M.}$ è descritta dall'esponenziale contenente il parametro libero a_1 . Quest'ultimo varia la descrizione della salita della parte iniziale dello spettro, ma non ha effetto sulla parte risonante. I parametri lasciati liberi sono A, k, a_1 , mentre con m_{th} si indica la soglia di produzione dello stato finale, che in questo caso è

Figura 7.1: Fit del canale ϕf_0

costituito dalle particelle ϕ, f_0 , secondo la finestra in massa specificata in par.(6.2). La parametrizzazione della risonanza è data dalla formula di Breit e Wigner come riportato in eq.(6.5). Il miglior fit ottenuto è riportato in fig.(7.1) e i parametri significativi sono riportati di seguito.

$$\begin{aligned}
 \chi^2/DOF &= 25/36 \\
 m_0 &= 2167 \pm 11 \text{ MeV} \\
 \Gamma_0 &= 69 \pm 21 \text{ MeV}
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Si può osservare che la stima della massa e della larghezza sono in ottimo accordo con le prime analisi svolte dal gruppo BaBar che sullo stesso set di valori considerato stima i seguenti parametri

$$\begin{aligned}
 \chi^2/DOF &= 28/33 \\
 m_0 &= 2169 \pm 12 \text{ MeV} \\
 \Gamma_0 &= 69 \pm 21 \text{ MeV}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

$E_{c.m.}$ (GeV)	σ (nb)
2.250	0.205 ± 0.065
2.285	0.203 ± 0.052
2.325	0.157 ± 0.029
2.375	0.176 ± 0.034
2.425	0.089 ± 0.032
2.475	0.106 ± 0.025
2.550	0.047 ± 0.011
2.650	0.027 ± 0.011
2.750	0.011 ± 0.009
2.900	0.002 ± 0.003

Tabella 7.2: Dati relativi alla sezione d'urto $e^+e^- \rightarrow \Lambda\bar{\Lambda}$.

7.3 Rianalisi del decadimento barionico $\Lambda\bar{\Lambda}$

Il decadimento barionico costituisce un'interessante discriminante tra le possibili composizioni in quark del tetraquark $Y(2175)$. In par.(6.1.2) è stato discusso come un decadimento dominante nel canale $\Lambda\bar{\Lambda}$ possa essere spiegato in termini di risonanza $Y = [sq][\bar{s}\bar{q}]$, mentre lo stesso decadimento risulta soppresso se si assume $Y = [ss][\bar{s}\bar{s}]$. La difficoltà dell'analisi di questo canale nasce dal valore di soglia di produzione dello stato finale, superiore alla massa nominale della risonanza intermedia $Y(2175)$. Pertanto i dati sperimentali disponibili devono essere compatibili con la coda della distribuzione Breit e Wigner utilizzata per descrivere la risonanza.

Per verificare il contributo del decadimento nel canale $\Lambda\bar{\Lambda}$ rispetto al canale ϕf_0 è stato effettuato un fit simultaneo sui due canali secondo la tecnica discussa in par.(7.1.1). I dati sperimentali sono riportati in tab.(7.3) La scelta della parametrizzazione che meglio descriva il fondo è basata sulla ricerca di un buon compromesso tra il valore del χ^2 restituito dal fit e la bontà visiva della curva ottimizzata sui dati. Questo in quanto la semplice richiesta sulla minimizzazione del χ^2 non è sufficiente per via dei pochi dati sperimentali affetti da notevoli errori per bassi valori di massa invariante.

I due fit migliori ottenuti sono riportati in fig.(7.2). A sinistra si assume nulla la com-

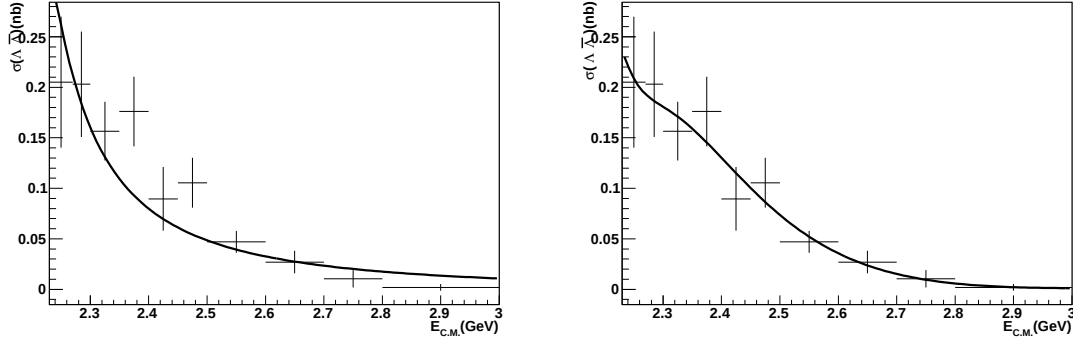


Figura 7.2: Fit del canale $\Lambda\bar{\Lambda}$ con contributo non risonante nullo (sinistra) e contributo non risonante esponenziale decrescente (destra).

ponente non risonante ($A_{nr} = 0$), ovvero tutti i dati sperimentali sono dovuti al segnale della risonanza. A destra la componente non risonante è fittata tramite una funzione esponenziale ($A_{nr} = A \times e^{-k(E-m_{th})}$) con due parametri liberi, ampiezza A e costante di decadimento k , fissando il valore di m_{th} alla soglia di produzione dello stato finale. In questa seconda parametrizzazione del contributo non risonante è ammessa una fase d'interferenza con il contributo risonante. I parametri significativi ottenuti tramite il fit per le due differenti assunzioni per la componente non risonante sono riportati di seguito.

$A_{nr} = 0$	$A_{nr} = A \times e^{-kE}$	
$\chi^2/DOF = 47/45$	$\chi^2/DOF = 28/42$	
$m_0 = 2158 \pm 11 MeV$	$m_0 = 2165 \pm 12 MeV$	
$\Gamma_0 = 66 \pm 20 MeV$	$\Gamma_0 = 69 \pm 21 MeV$	
$\mathcal{R}(\Lambda\bar{\Lambda}, \phi f_0) = 44 \pm 19$	$\mathcal{R}(\Lambda\bar{\Lambda}, \phi f_0) = 23 \pm 51$	(7.8)

Si osserva che assumendo nullo il contributo non risonante si riesce a spiegare l'intero spettro ottenuto sperimentalmente in termini di segnale. La bontà del fit è espressa dal

buon valore di χ^2 ottenuto, inoltre i valore relativi alla massa e alla larghezza della risonanza sono molto prossimi a quelli stimati tramite il fit al singolo canale di scoperta. Si sottolinea che il numero dei gradi di libertà DOF tiene conto anche dei parametri necessari per descrivere il canale ϕf_0 , in quanto si utilizza il fit combinato. Il valore di $\mathcal{R}(\Lambda\bar{\Lambda}, \phi f_0)$ ottenuto indica che la frazione di decadimento nel canale $\Lambda\bar{\Lambda}$ è un ordine di grandezza superiore alla frazione di decadimento nel canale ϕf_0 .

Anche assumendo la parametrizzazione esponenziale si ottiene un buon fit. La grande incertezza sul rapporto $\mathcal{R}$ rende il valore compatibile con zero.

Da quanto osservato risulta che il decadimento nel canale barionico $\Lambda\bar{\Lambda}$ è favorito se si assume nullo il contributo della componente non risonante. Questa assunzione non influisce sulla determinazione delle quantità m_0 e Γ_0 relative alla risonanza, consistenti con quanto si trova dal fit al singolo canale di scoperta della risonanza stessa. Sulla base della discussione sui possibili decadimenti sviluppata in par.(6.1.2) si può quindi evidenziare un'indicazione circa il contenuto in quark $[sq][\bar{s}\bar{q}]$ della risonanza $Y(2175)$.

7.4 Rianalisi del canale mesonico $\phi\eta$

Infine si è effettuato un fit simultaneo ai tre canali di decadimento elencati in eq.(7.3). Lo spettro di massa invariante del canale $\phi\eta$ presenta una struttura attorno alla massa della risonanza $Y(2175)$, ma la componente non risonante è molto alta e la struttura è poco pronunciata (si veda fig.(7.3)). Anche in questo caso il fit simultaneo è un'ottima tecnica per investigare la compatibilità tra la struttura e la risonanza $Y(2175)$. I dati a disposizione sono riportati in tab.(7.4).

Il miglior fit ottenuto è mostrato in fig.(7.3). La parametrizzazione del fondo è stata ottimizzata attraverso la funzione

$$A_{nr} = A \times e^{-k(E-m_{th})^\alpha} \times (1 - e^{-(\frac{E-m_{th}}{a_1})^4}) + k \quad (7.9)$$

$E_{\text{c.m.}}$ (GeV)	σ (nb)	$E_{\text{c.m.}}$ (GeV)	σ (nb)	$E_{\text{c.m.}}$ (GeV)	σ (nb)
1.57	0.11 ± 0.11	1.99	0.53 ± 0.20	2.42	0.06 ± 0.04
1.59	0.16 ± 0.18	2.01	0.52 ± 0.20	2.46	0.03 ± 0.03
1.61	0.80 ± 0.31	2.03	0.37 ± 0.16	2.50	0.12 ± 0.06
1.63	1.51 ± 0.41	2.05	0.36 ± 0.16	2.54	0.06 ± 0.04
1.65	2.34 ± 0.49	2.07	0.43 ± 0.18	2.58	0.12 ± 0.06
1.67	2.78 ± 0.53	2.09	0.29 ± 0.14	2.62	0.12 ± 0.06
1.69	2.91 ± 0.53	2.11	0.56 ± 0.20	2.66	0.12 ± 0.06
1.71	2.94 ± 0.53	2.13	0.70 ± 0.22	2.70	0.09 ± 0.05
1.73	1.67 ± 0.39	2.15	0.48 ± 0.18	2.74	0.09 ± 0.05
1.75	2.18 ± 0.45	2.17	0.27 ± 0.14	2.78	0.08 ± 0.05
1.77	2.32 ± 0.45	2.19	0.20 ± 0.12	2.82	0.07 ± 0.05
1.79	1.79 ± 0.41	2.21	0.27 ± 0.13	2.86	0.06 ± 0.04
1.81	0.99 ± 0.30	2.23	0.20 ± 0.12	2.91	0.09 ± 0.04
1.83	0.97 ± 0.30	2.25	0.16 ± 0.12	2.97	0.02 ± 0.02
1.85	0.75 ± 0.25	2.27	0.13 ± 0.09	3.03	0.02 ± 0.02
1.87	1.06 ± 0.30	2.29	0.13 ± 0.09	3.09	0.13 ± 0.05
1.89	0.64 ± 0.23	2.31	0.26 ± 0.13	3.15	0.08 ± 0.04
1.91	0.87 ± 0.26	2.33	0.13 ± 0.09	3.21	0.02 ± 0.02
1.93	0.71 ± 0.24	2.35	0.13 ± 0.09	3.27	0.02 ± 0.02
1.95	1.24 ± 0.31	2.37	0.41 ± 0.17	3.33	0.01 ± 0.02
1.97	0.61 ± 0.22	2.39	0.06 ± 0.06	3.39	0.02 ± 0.02

Tabella 7.3: Dati relativi alla sezione d'urto $e^+e^- \rightarrow \phi(1020)\eta$.

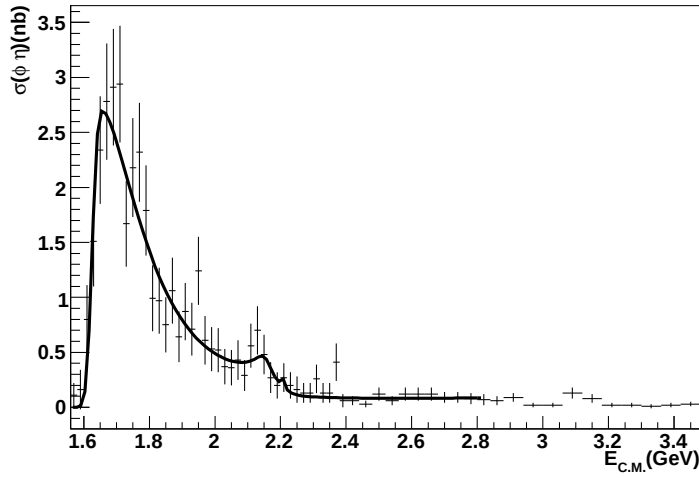


Figura 7.3: Fit del canale $\phi\eta$, effettuato tramite il fit simultaneo ai tre canali in analisi dove il primo esponenziale descrive la discesa della sezione d'urto che segue la parte più alta dello spettro, il secondo esponenziale descrive la rapida salita per piccoli valori di massa invariante e la costante k tiene conto della sezione d'urto non nulla per alti valori di massa invariante. Si osserva che viene lasciata variabile la potenza α in quanto fissando tale parametro ad un valore intero non si riesce ad ottenere un buon accordo con lo spettro sperimentale. Di seguito si riportano soltanto i parametri più significativi

$$\begin{aligned}
 \chi^2/DOF &= 85/103 \\
 m_0 &= 2158 \pm 9 \text{ MeV} \\
 \Gamma_0 &= 72 \pm 20 \text{ MeV} \\
 \mathcal{R}(\Lambda\bar{\Lambda}, \phi f_0) &= 6.6 \pm 3.5 \\
 \mathcal{R}(\phi\eta, \phi f_0) &= 10 \pm 3
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Il fit simultaneo sui tre canali stima un buon χ^2 e in fig.(7.3) si constata che la curva segue bene i dati sperimentali. La struttura visibile nello spettro $\phi\eta$ sembra spostata verso un valore di massa inferiore rispetto a quanto si stima per la $Y(2175)$ attraverso

il singolo canale di scoperta. Questo è constatato anche attraverso un fit indipendente effettuato al singolo canale $\phi\eta$ e riportato in fig.(7.4). La forma funzionale utilizzata per la componente non risonante è quella riportata in eq.(7.9), mentre il contributo risonante è parametrizzato attraverso la formula di Breit e Wigner in eq.(6.5) valida per il singolo canale. I risultati ottenuti per la parte risonante sono di seguito elencati

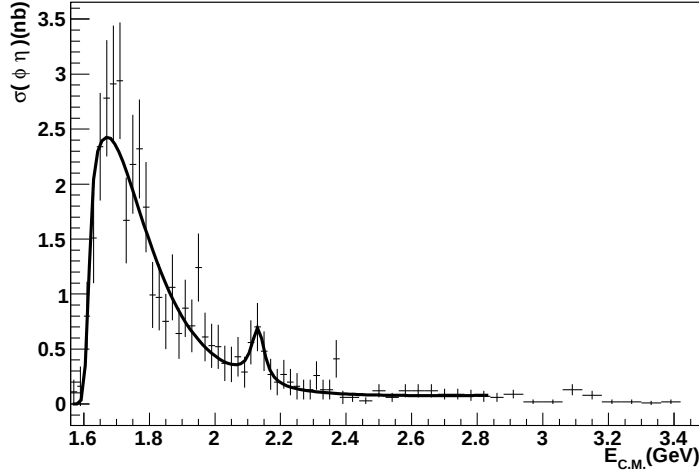


Figura 7.4: Fit del singolo canale $\phi\eta$

$$\begin{aligned}
 \chi^2/DOF &= 33/46 \\
 m_0 &= 2133 \pm 14 MeV \\
 \Gamma_0 &= 50 \pm 32 MeV
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

Mostrano una compatibilità con quelli riportati in eq.(7.6) e relativi al canale di scoperta ϕf_0 e giustificano l'utilizzo del fit simultaneo per investigare la risposta all'ipotesi di risonanza comune.

Conclusioni

Il lavoro svolto è basato sull'interpretazione della risonanza mesonica $Y(2175)$ come possibile stato a quattro quark. La $Y(2175)$ è uno stato con numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$, massa 2175 Mev e larghezza 60 Mev, non previsto dallo schema $q\bar{q}$. Il canale di scoperta contiene uno stato tetraquark tra i prodotti di decadimento e i numeri quantici $J^{PC} = 1^{--}$ suggeriscono che si tratti di uno stato eccitato rispetto al multipletto di stati descritti come tetraquark osservati a basse energie. Al fine di testare la compatibilità con la struttura osservata sperimentalmente ed assegnarne la composizione in quark favorita è stato calcolato lo spettro di massa degli stati eccitati $J^{PC} = 1^{--}$ facendo utilizzo del modello a quark costituenti. Analizzando i possibili canali di decadimento sotto entrambe le ipotesi $[qs][\bar{q}\bar{s}]$ e $[ss][\bar{s}\bar{s}]$ favorite dall'analisi teorica si sono identificati tre canali di decadimento comuni. La discriminazione tra i due possibili contenuti in quark è stata basata sulla nuova analisi di dati sperimentali pubblicati dalla collaborazione *BaBar*. Il canale barionico in particolare costituisce una forte discriminante tra le due ipotesi sul contenuto in quark della risonanza $Y(2175)$.

In conclusione, sia dall'analisi teorica sia dalla rianalisi dei dati sperimentali svolta si evince che la risonanza $Y(2175)$ può essere interpretata come stato a quattro quark, con contenuto in quark $[qs][\bar{q}\bar{s}]$.

Bibliografia

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [2] R. L. Jaffe, Phys. Rev. D **15** (1977) 267.
- [3] L. Maiani, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 182003 [arXiv:0707.3354 [hep-ph]].
- [4] K. Abe *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 142001 [arXiv:0708.1790 [hep-ex]].
- [5] L. Maiani, A. D. Polosa and V. Riquer, arXiv:0708.3997 [hep-ph].
- [6] W. Heisenberg , Über den Bau der Atomkerne, Zeitschrift für Physik 77: 1-11.
- [7] H. L. Anderson, E. Fermi, E. A. Long and D. E. Nagle, Phys. Rev. **85** (1952) 936.
- [8] Nishijima, K , Progress in Theoretical Physics, 13, 285(1955)
- [9] Murray Gell-Mann, Nuovo Cim, Supp 4 848 (1956)
- [10] M. Breidenbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23**, 935 (1969).
- [11] C. Amsler *et al.* [Crystal Barrel Collaboration.], Phys. Lett. B **327** (1994) 425.
- [12] E. M. Aitala *et al.* [E791 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 765 [arXiv:hep-ex/0007027].

- [13] M. Ablikim *et al.* [BES Collaboration], Phys. Lett. B **645** (2007) 19 [arXiv:hep-ex/0610023].
- [14] M. Ablikim *et al.* [BES Collaboration], Phys. Lett. B **598** (2004) 149 [arXiv:hep-ex/0406038].
- [15] M. Ablikim *et al.* [BES Collaboration], Phys. Lett. B **633** (2006) 681 [arXiv:hep-ex/0506055].
- [16] E. M. Aitala *et al.* [E791 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 121801 [arXiv:hep-ex/0204018].
- [17] O. W. Greenberg and M. Resnikoff, Phys. Rev. **163** (1967) 1844.
- [18] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **75** (1974) 461.
- [19] E. Witten, Nucl. Phys. B **160** (1979) 57.
- [20] S. R. Coleman, “1/N.”
- [21] H. Georgi, “Lie algebras in particle physics,” Addison-Wesley publ. co., c1982.
- [22] R. L. Jaffe, Phys. Rept. **409** (2005) 1 [Nucl. Phys. Proc. Suppl. **142** (2005) 343] [arXiv:hep-ph/0409065].
- [23] C. Amsler and N. A. Tornqvist, Phys. Rept. **389** (2004) 61.
- [24] R. L. Jaffe, arXiv:hep-ph/0001123.
- [25] A. De Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **38**, 317 (1977).
- [26] A. De Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12** (1975) 147.
- [27] L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Rev. D **71** (2005) 014028 [arXiv:hep-ph/0412098].

-
- [28] H. Czyz, A. Grzelinska, J. H. Kuhn and G. Rodrigo, Eur. Phys. J. C **33** (2004) 333 [arXiv:hep-ph/0308312].
- [29] M. Benayoun, S. I. Eidelman, V. N. Ivanchenko and Z. K. Silagadze, Mod. Phys. Lett. A **14** (1999) 2605 [arXiv:hep-ph/9910523].
- [30] G. 't. Hooft, G. Isidori, L. Maiani, A. D. Polosa and V. Riquer, arXiv:0801.2288 [hep-ph].
- [31] <http://root.cern.ch/>
- [32] <http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/minmain.html>
- [33] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **74**, 091103 (2006) [arXiv:hep-ex/0610018].
- [34] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **76**, 092006 (2007) [arXiv:0709.1988 [hep-ex]].
- [35] B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], Phys. Rev. D **77**, 092002 (2008) [arXiv:0710.4451 [hep-ex]].
- [36] J.M. Blatt and V.F. Weisskopf, Theor. Nucl. Phys. and Nucl. Phys., NY (1952), 361.